ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

9ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»

Σάββατο 28 Ιανουαρίου 2017

<u>Α΄ Γυμνασίου</u>

<u>Θέμα 1ο</u>

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\left(2^5-3^3\right):5+\left(6{,}4-5\right)\cdot\frac{20}{4}$ και $B=18\cdot\left(1-\frac{1}{2}:\frac{3}{4}\right)\cdot\left(1\frac{3}{6}-1\right)$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων Α και Β.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A^2+B^2+A\cdot B+1$

γ) Αν οι κ,λ είναι αντίστροφοι αριθμοί, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\left(\kappa\cdot\lambda\right)^{2017}+\kappa\left(\lambda+\frac{1}{\kappa}\right)$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

α)

$$A=\left(2^5-3^3\right):5+\left(6{,}4-5\right)\cdot\frac{20}{4}$$
$$A=\left(32-27\right):5+1{,}4\cdot5$$
$$A=5:5+7$$
$$A=1+7$$
$$A=8$$

$$B=18\cdot\left(1-\frac{1}{2}:\frac{3}{4}\right)\cdot\left(1\frac{3}{6}-1\right)$$
$$B=18\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{9}{6}-1\right)$$
$$B=18\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{9}{6}-\frac{6}{6}\right)$$
$$B=1\cancel{8}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{3}{\cancel{6}}$$
$$B=3$$

β) $A^2+B^2+A\cdot B+1=8^2+3^2+3\cdot8+1=64+9+24+1$

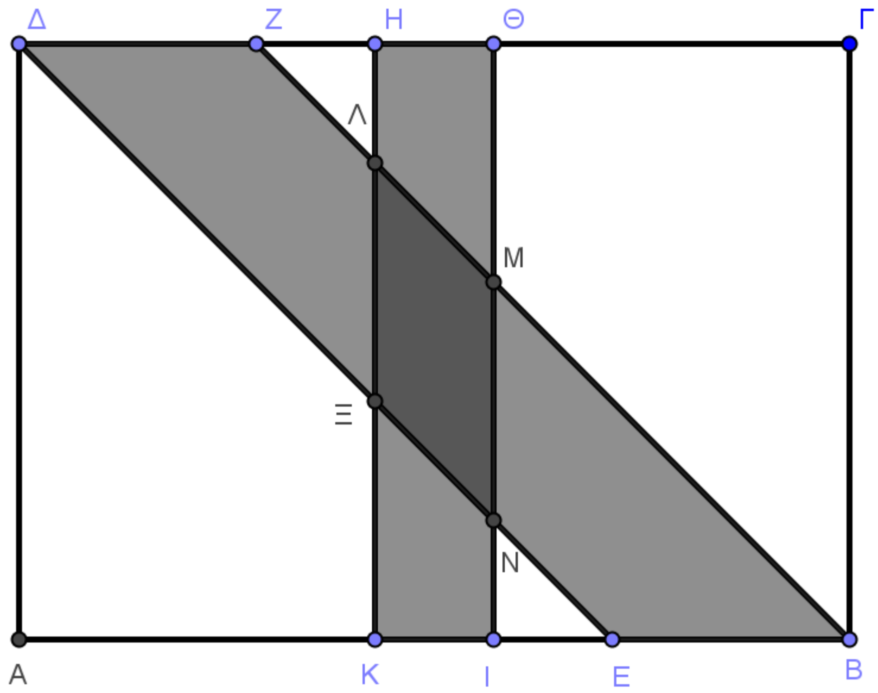
γ) $\left(\kappa\cdot\lambda\right)^{2017}+\kappa\left(\lambda+\frac{1}{\kappa}\right)=1^{2017}+\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\frac{1}{\kappa}=1+1+1=3$

<u>**Θέμα 2^ο^**</u>

Το διπλανό χωράφι ΑΒΓΔ είναι σχήματος ορθογωνίου με πλευρές ΑΒ=7εκ. και ΑΔ=5εκ. από το οποίο διέρχονται δύο δρόμοι. Ακόμη, δίνεται ότι ΛΞ=2εκ. ΔΖ = ΒΕ = 2εκ και ΗΘ = ΚΙ = 1εκ.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωραφιού ΑΒΓΔ.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου ΛΜΝΞ.



γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτεται από δρόμους.

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) $\mathrm{E}_{\mathrm{ABGD}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AD} = 5 \times 7 = 35\, t.ek.$

β) $\mathrm{E}_{\mathrm{LMNX}} = \mathrm{LX} \times \mathrm{HQ} = 2 \times 1 = 2\, t.ek.$

γ) $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\Delta\mathrm{ZEB}} + \mathrm{E}_{\mathrm{H\Theta IK}} - \mathrm{E}_{\Lambda\mathrm{MN}\Xi} = \mathrm{EB}\cdot\mathrm{A}\Delta + \mathrm{KI}\cdot\mathrm{KH} - 2 = 2\cdot 5 + 1\cdot 5 - 2 = 13\, \tau\varepsilon\kappa.$

<u>**Θέμα 3^ο^**</u>

Ένας διψήφιος αριθμός είναι **πενταπλάσιος** από το άθροισμα των ψηφίων του.

α) Να δικαιολογήσετε πλήρως ότι το ψηφίο των μονάδων του είναι 0 ή 5.

β) Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Ο διψήφιος αριθμός είναι πενταπλάσιος από μια ακέραια παράσταση. Άρα είναι πολλαπλάσιος του 5, δηλαδή ο αριθμός διαιρείται από το 5. Συνεπώς θα το ψηφίο των μονάδων του θα είναι 0 ή 5.

β) <u>α΄ τρόπος</u>

Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα οι πιθανοί διψήφιοι αριθμοί είναι οι 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90 και 95. Από όλους αυτούς, μόνο ο 45 έχει την παραπάνω ιδιότητα.

<u>β΄ τρόπος</u>

Έστω ότι ο αριθμός έχει ψηφίο δεκάδων το α και ψηφίο μονάδων το β. Ο αριθμός, τότε, γράφεται ως 10*α+β. Επομένως πρέπει να ισχύει $10\cdot\alpha+\beta=5\cdot(\alpha+\beta)$. [σχέση (1)]

Από το (α) ερώτημα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: β=0 ή β=5.
Αν β=0, τότε η σχέση (1) γράφεται: $10\cdot\alpha=5\cdot\alpha$, δηλαδή α=0, άτοπο, διότι ο αριθμός είναι διψήφιος.
Αν β=5, τότε η σχέση (1) γράφεται: $10\cdot\alpha+5=5\cdot(\alpha+5)$. Από εδώ και πέρα είτε λύνουμε την εξίσωση, είτε δοκιμάζουμε στην εξίσωση τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Μοναδική λύση ο αριθμός 45.

<u>Θέμα 4^{o}</u>

Στο 8ο Πανελλήνιο Μαθηματικό Καλοκαιρινό Σχολείο της Νάουσας συμμετείχαν συνολικά **2017 μαθητές** (αγόρια και κορίτσια) από **8 τάξεις** (Ε' Δημοτικού έως και Γ' Λυκείου) από **9 νομούς.**

α) Να δικαιολογήσετε ότι υπήρχαν τουλάχιστον **1009 μαθητές** του ίδιου φύλου.

β) Να δικαιολογήσετε ότι υπήρχαν **15 μαθητές** του ίδιου φύλου, ίδιας τάξης και από τον ίδιο νομό.

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Ας υποθέσουμε ότι το πλήθος των αγοριών ήταν το πολύ 1008. Το ίδιο και για το πλήθος των κοριτσιών. Τότε, το συνολικό πλήθος των μαθητών θα ήταν το πολύ 1008 + 1008 = 2016, άτοπο, διότι όλοι οι μαθητές ήταν σε πλήθος 2017. Άρα, υπήρχαν 1009 μαθητές του ιδίου φύλου (αγόρια ή κορίτσια).

β) Τα 2 φύλα, οι 8 τάξεις και οι 9 νομοί μας δίνουν συνολικά 2*8*9=144 διαφορετικές περιπτώσεις μαθητών, ως προς το φύλο, την τάξη και το νομό. Αν σε κάθε μία από τις 144 περιπτώσεις υπήρχαν το πολύ 14 μαθητές, τότε στο σχολείο θα συμμετείχαν το πολύ 144*14= 2016, άτοπο, αφού όλοι οι μαθητές ήταν 2017. Άρα υπήρχαν τουλάχιστον 15 μαθητές του ίδιου φύλου, της ίδιας τάξης και από τον ίδιο νομό.