

Αρχιμήδης Μικροί 2007-2008

1. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς διαιρέτες των αριθμών:

α) $A=p^k$, όπου p πρώτος θετικός ακέραιος και k θετικός ακέραιος

β) $B=p^k \cdot q^l$, όπου p, q πρώτοι θετικοί ακέραιοι διαφορετικοί μεταξύ τους και k, l θετικοί ακέραιοι

γ) $\Gamma=1944$

2. Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z είναι μικρότεροι του 2 και τέτοιοι ώστε $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{3}{2} < \frac{1+y^2}{x+2} + \frac{1+z^2}{y+2} + \frac{1+x^2}{z+2} < 3$$

3. Να βρεθεί η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του θετικού ακεραίου x για την οποία ο αριθμός $A = 2^{182} + 4^x + 8^{700}$ είναι τέλειο τετράγωνο.

4. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta = a$, $AB = 2a$, $B\Gamma = 3a$ και $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$. Έστω E και Z τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Φέρουμε τη ZI κάθετη προς τη βάση $B\Gamma$ (το σημείο I πάνω στη $B\Gamma$). Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

β) Το μέσο O της EZ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Delta Z$.

γ) Οι ευθείες AZ και ΔI τέμνονται επί της ευθείας BO .