ΕΠΑΝΑΛΛΗΠΤΙΚΕΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Συγγραφή - Επιμέλεια

ΑΔΑΜΙΔΗΣ ΗΛΙΑΣ
ΠΑΠΑΝΤΩΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ
ΣΤΥΛΙΑΝΙΔΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ
ΒΕΡΟΙΑ
2019

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύουν:

$$\frac{f'(x)-f(x)}{f(x)}=\frac{x-1}{e^x-x},\quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

$$f(0)=1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ f(x)\geq 1,\quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Γ1. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$.

Γ2. Να δείξετε ότι : $f(x)+f(-x)\geq 2$. Πότε ισχύει το "$=$"·

Γ3. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Γ4. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $e^x=x+\alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

Γ5. Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x)$.

Γ6. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας (ε) της γραφικής παράστασης της $f(x)$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ7. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτόμενης ευθείας (ε) και της ευθείας $x=0$.

Γ8. Να αποδείξετε ότι $e^x\geq ex$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Γ1. Από την 1 έχουμε:

$$\frac{f'(x)-f(x)}{f(x)}=\frac{x-1}{e^x-x}\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}-1=\frac{x-1}{e^x-x}\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=1+\frac{x-1}{e^x-x}\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{e^x-x+x-1}{e^x-x}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{e^x-1}{e^x-x}\Rightarrow(\ln f(x))'=(\ln(e^x-x))'$$

Άρα $\ln f(x)=\ln(e^x-x)+c$.
Για $x=0$: $\ln f(0)=\ln(e^0-0)+c\Rightarrow\ln 1=\ln 1+c\Rightarrow c=0$
Έτσι $\ln f(x)=\ln(e^x-x)$.
Όμως η $y=lnx$ είναι γν.αύξουσα άρα και "$1-1$" επομένως θα είναι και $f(x)=e^x-x$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Θέλουμε να δείξουμε ότι: $f(x)+f(-x)\geq 2$.
Ισοδύναμα έχουμε:

$$e^x-x+e^{-x}+x\geq 2\Leftrightarrow e^x+e^{-x}\geq 2\Leftrightarrow e^x+\frac{1}{e^x}\geq 2\Leftrightarrow(e^x)^2+1\geq 2e^x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(e^x)^2-2e^x+1\geq 0\Leftrightarrow(e^x-1)^2\geq 0,$$

που ισχυεί. Άρα ισοδύναμα ισχύει και η αρχική. Το "$=$" ισχύει όταν

$$e^x-1=0\Leftrightarrow x=0$$

Γ3. $f'(x)=(e^x-x)'=e^x-1$
$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow e^x\geq e^0\Leftrightarrow x\geq 0$
Έτσι έχουμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Δηλαδή, στο διάστημα $(-\infty,0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ στο διάστημα $[0,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Στο σημείο $x_0 = 0$ η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει ελάχιστο με τιμή $\min f(x) = f(0) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x) \overset{(\infty - \infty)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \left[e^x (1 - \frac{x}{e^x})\right]$

είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$

έτσι $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = 1$ και επομένως $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Τελικά, $f(A) = [1, +\infty)$.

Γ4. Έχουμε $e^x = x + a \Leftrightarrow e^x - x = a \Leftrightarrow f(x) = a$

i) αν $a \in (-\infty, 1)$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

ii) $a = 1$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση

iii) αν $a \in (1, +\infty)$, η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες

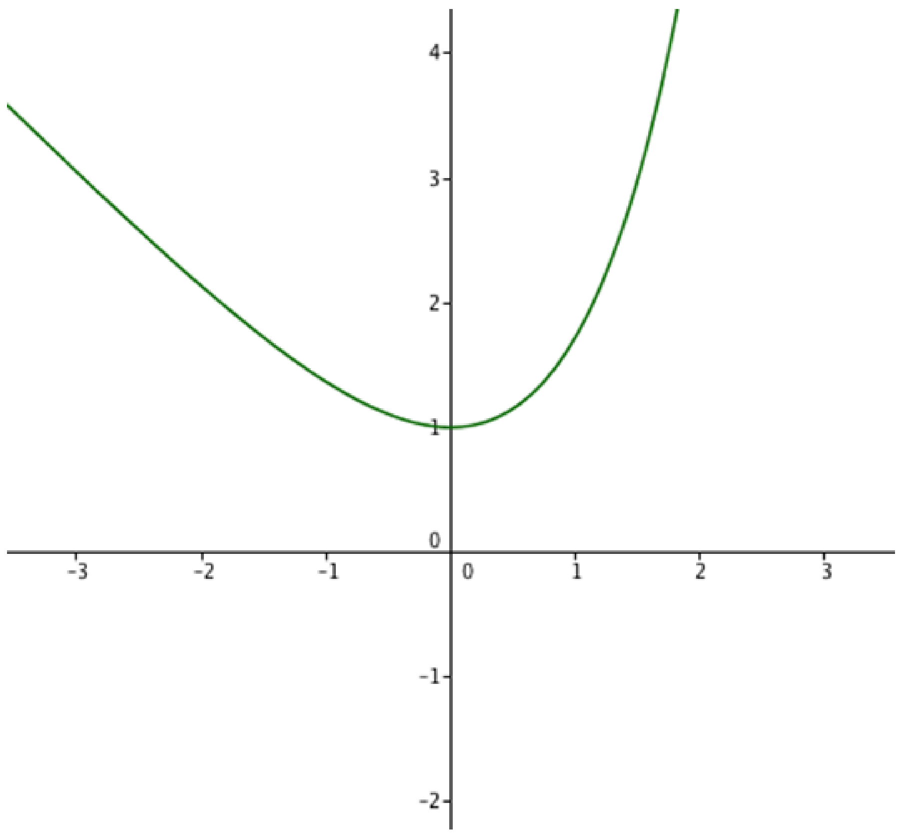
Γ5. $f'(x) = e^x - 1$

$f''(x) = (e^x - 1)' = e^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Οπότε η f είναι κυρτή και σημεία καμπής δεν υπάρχουν.

Έτσι:

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f''(x)$	+	+
$f(x)$		



Γ6. Έστω $M(x_1, f(x_1))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης ευθείας (ε) με την $f(x)$, ώστε αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η (ε) έχει εξίσωση:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Rightarrow$$
$$y - (e^{x_1} - x_1) = (e^{x_1} - 1)(x - x_1)$$

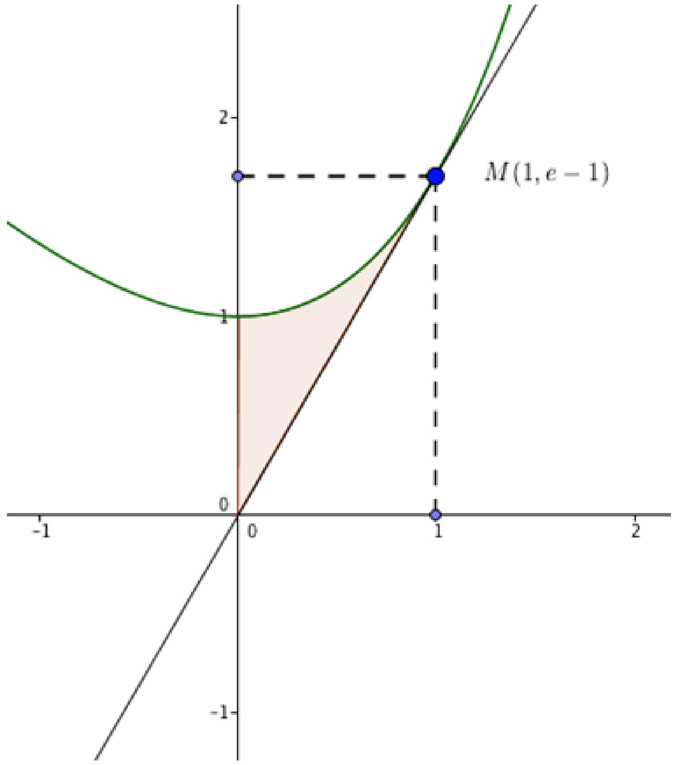
Όμως για $x = 0$ είναι και $y = 0$ έτσι:

$$0 - e^{x_1} + x_1 = (e^{x_1} - 1)(0 - x_1) \Rightarrow$$
$$-e^{x_1} + x_1 = -x_1 e^{x_1} + x_1 \Rightarrow$$
$$x_1 e^{x_1} - e^{x_1} = 0 \Rightarrow$$
$$e^{x_1}(x_1 - 1) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 = 1$$

Οπότε το σημείο επαφής είναι το $M(1, e - 1)$. Η εξίσωση εφαπτομένης είναι:

$$y - (e - 1) = (e - 1)(x - 1) \Rightarrow$$
$$y - e + 1 = (e - 1)x - e + 1 \Rightarrow$$
$$y = (e - 1)x$$

Γ7. Η f είναι κυρτή στο $[0,1]$ άρα



$f(x) \geq (e-1)x$, έτσι:

$$\mathrm{E} = \int_0^1 [f(x)-(e-1)x]\,dx = \int_0^1 (e^x - x - (e-1)x)dx = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 x dx - (e-1)\int_0^1 x dx =$$

$$= [e^x]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - (e-1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e - 1 - \left(\frac{1}{2}-0\right) - (e-1)\left(\frac{1}{2}-0\right) = e - 1 - \frac{1}{2} - \frac{e-1}{2} =$$

$$= e - 1 - \frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1 = \frac{e-2}{2}\,\tau.\mu.$$

Γ8. Θέλουμε να δείξουμε ότι $e^x \geq ex$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισοδύναμα:
$e^x \geq ex \Leftrightarrow e^x - x \geq ex \Leftrightarrow f(x) \geq (e-1)x$, που ισχύει αφού δείξαμε ότι η f είναι κυρτή οπότε βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη ευθεία.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Γ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

Γ2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Γ3. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ4. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Γ5. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η $f^{-1}(x)$ και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την καμπυλότητα και τα σημεία καμπής.

Γ6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την εφαπτομένη ευθεία (ε) και την $x = 1$.

Γ7. Αν E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0, x = 1$ και E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $y'y$ και τις ευθείες $y = 0, y = 1$ να δείξετε ότι:

$$E_1 + E_2 = 2\left(1 - \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)$$

Γ8. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(f^{-1}(x)\cdot\frac{e^x}{x}\right)$$

ΛΥΣΗ

Γ1. Πρέπει $x+\sqrt{x^2+1}>0$

- $x<0$, τότε $x+\sqrt{x^2+1}>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>-x \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2>(-x)^2 \Rightarrow$ $x^2+1>x^2+1 \Rightarrow 1>0$, που ισχυεί
- $x>0$, τότε $x+\sqrt{x^2+1}>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>-x$, που ισχύει

Οπότε $A_f=\mathbb{R}$

Γ2. Δείξαμε ότι $A_f=\mathbb{R}$ έτσι είναι $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$ με:

$$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$
$$=\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\ln\frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\ln\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\ln 1-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=$$
$$=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-f(x)$$

δηλαδή η f είναι περιττή συνάρτηση και άρα η C_f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Γ3. Η παράγωγος της f είναι

$$f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=$$
$$=\frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{1}}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Έτσι αφού $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Γ4. $f''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=-\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=-\frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)(x^2+1)}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)(x^2+1)}=0 \Leftrightarrow x=0$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)(x^2+1)}>0 \Leftrightarrow x<0$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)(x^2+1)}<0 \Leftrightarrow x>0$

Έτσι:

Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ η C_f είναι κυρτή

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$
		Σ.Κ.	

Στο διάστημα $[0, +\infty)$ η C_f είναι κοίλη

Στο σημείο $x_0 = 0$ η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει καμπή στο $O(0,0)$.

Γ5. Δείξαμε ότι $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,οπότε είναι και "$1-1$", άρα αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = y \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} = e^y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = e^y - x$$

Άρα και

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 = (e^y - x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = e^{2y} - 2xe^y + x^2 \Leftrightarrow 2xe^y = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{2e^y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{e^{2y}-1}{2e^y} = \frac{e^{2y}}{2e^y} - \frac{1}{2e^y} = \frac{e^y}{2} - \frac{1}{2e^y} = \frac{e^y}{2} - \frac{e^{-y}}{2} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

Τελικά, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$$

$$g''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = 0$$

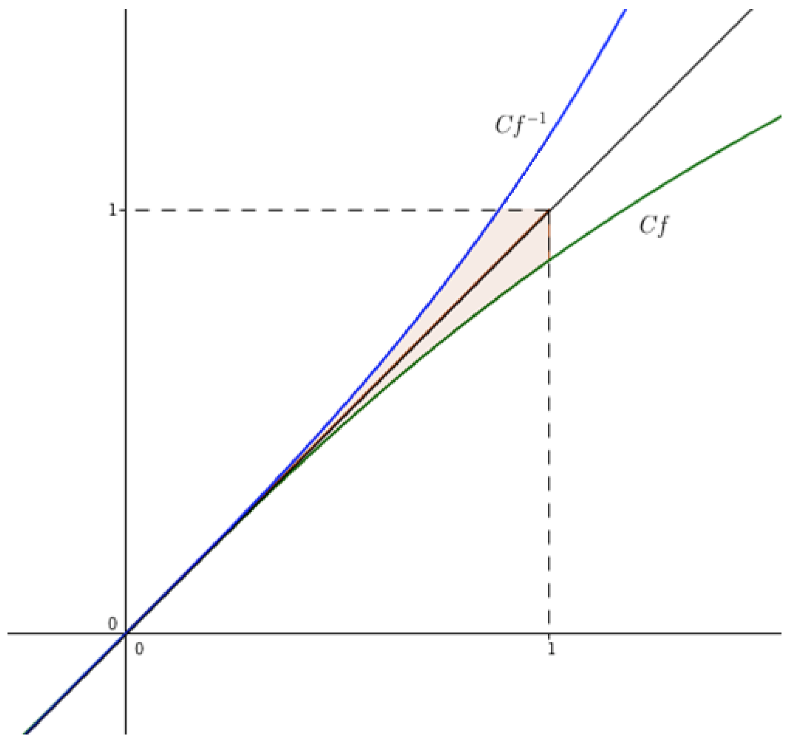
Έτσι :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	+
$g''(x)$	-	+
$g(x)$	∩	∪

Σ.Κ.

Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ η C_g είναι κοίλη
Στο διάστημα $[0, +\infty)$ η C_g είναι κυρτή
Στο σημείο $x_0 = 0$ η γραφική παράσταση της g παρουσιάζει καμπή στο $O(0,0)$.

Γ6. Η εφαπτόμενη ευθεία (ε) της C_f στο $x_0 = 0$ έχει εξίσωση :



$(\varepsilon:)\ y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow$
$y-0=1\cdot(x-0)\Rightarrow$
$y=x$
Και η C_f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ άρα $f(x)\leq x$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και το "$=$" ισχύει μόνο για $x=0$ άρα $f(x)-x\leq 0$.
Οπότε:

$$\mathrm{E}=\int_0^1|f(x)-x|dx=\int_0^1(x-f(x))dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1 f(x)dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}-\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

$$I_1=\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=\int_0^1(x)'\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\left[x\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\left[x\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^1 x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Θέτω $\sqrt{x^2+1}=t\Rightarrow x^2+1=t^2\Rightarrow 2xdx=2tdt\Rightarrow xdx=tdt$
όταν $x=0\to t=1$ και $x=1\to t=\sqrt{2}$

$$I_1=\ln(1+\sqrt{2})-\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t}{t}dt=\ln(1+\sqrt{2})-[t]_1^{\sqrt{2}}=\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1$$

Άρα $E=\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2})$.

Γ7. Λόγω συμμετρίας της C_f και C_g ως προς την $y=x$ είναι: $E_1=E_2$ και άρα:

$$E_1+E_2=(\mathrm{AB O\Gamma})-2\mathrm{E}=(\mathrm{OB})\cdot(\mathrm{AB})-2\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2})\right)=$$

$$=1\cdot 1-2\sqrt{2}+1+2\ln(1+\sqrt{2})=2-2\sqrt{2}+2\ln(1+\sqrt{2})=2\cdot\left(1-\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$$

Γ8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(f^{-1}(x)\cdot\frac{e^x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)'}{(2x)'}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{2}e^{2x}}{\cancel{2}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{2x}=1$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και επαληθεύει τη σχέση:

$$\left(x^2+1\right)\cdot\left[f(x)-\ln\sqrt{x^2+1}\right]=x\cdot\left[x-\left(x^2+1\right)f'(x)\right],\quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad (3)$$

Δ1. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$.

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι άρτια.

Δ3. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ4. Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Δ5. Να εξετάσετε αν η γραφικής της παράσταση έχει ασύμπτωτες και στη συνέχεια να γίνει η γραφική της παράσταση.

Δ6. Να λυθεί η εξίσωση $2f(x)=x+\ln\frac{2}{e}$, για κάθε $x\in[1,+\infty)$

Δ7. Να αποδείξετε ότι $\frac{E_2}{E_1}=\frac{\ln 4}{4-\pi}-1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x=-1$, $x=1$ και $y=\frac{\ln\sqrt{2}}{2}$
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x=-1$, $x=1$ και την ευθεία $y=0$.

Δ8. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+x}{f(x)+e^x}$.

ΛΥΣΗ

Δ1. Από την 3 έχουμε:

$$\left(x^2+1\right)\cdot f(x)-\left(x^2+1\right)\cdot\ln\sqrt{x^2+1}=x^2-x\left(x^2+1\right)f'(x)\Leftrightarrow$$
$$\left(x^2+1\right)\cdot f(x)+x\left(x^2+1\right)f'(x)=\left(x^2+1\right)\cdot\ln\sqrt{x^2+1}+x^2\overset{:(x^2+1)}{\Leftrightarrow}$$
$$f(x)+xf'(x)=\ln\sqrt{x^2+1}+x\cdot\frac{x}{x^2+1}\Leftrightarrow$$
$$(x\cdot f(x))'=(x)'\cdot\ln\sqrt{x^2+1}+x\cdot\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)'\Leftrightarrow$$
$$(x\cdot f(x))'=\left(x\cdot\ln\sqrt{x^2+1}\right)'$$

Άρα $x\cdot f(x)=x\cdot\ln\sqrt{x^2+1}+c$

Για $x=0$: $0=0+c\Leftrightarrow c=0$

Επομένως, $x\cdot f(x)=x\cdot\ln\sqrt{x^2+1}+c\overset{:x\neq 0}{\Leftrightarrow}f(x)=\ln\sqrt{x^2+1},\ x\neq 0$

$f(x)=\ln\sqrt{x^2+1},\ x\neq 0$

Η f όμως είναι παραγωγίσιμη , άρα παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$, άρα και συνεχής με: $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)=\ln 1=0$, δηλαδή $f(0)=0$, που επαληθεύει τον τύπο της $f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}$.

Τελικά, $f(x)=\ln\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Αφού $A_f=\mathbb{R}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$ με

$f(-x)=\ln\sqrt{(-x)^2+1}=\ln\sqrt{x^2+1}=f(x)$, άρα f άρτια.

Δ3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x)=\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{x^2+1}$$
$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+1}=0\Leftrightarrow x=0$$
$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+1}>0\overset{x^2+1>0}{\Leftrightarrow}x>0$$

Άρα έχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘		↗
		min	

Δηλαδή, στο διάστημα $(-\infty, 0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ στο διάστημα $[0, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.
Στο σημείο $x_0 = 0$ η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει ελάχιστο με τιμή $\min f(x) = f(0) = 1$

Δ4. $f''(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x)' \cdot x^2+1-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$

Άρα έχουμε:

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$			

Οπότε στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ η f είναι κοίλη, ενώ στο διάστημα $[-1, 1]$ η f είναι κυρτή.
Στα σημεία $A(-1, \ln\sqrt{2})$ και $B(1, \ln\sqrt{2})$ η γραφική παράσταση της φ παρουσιάζει σημεία καμπής.

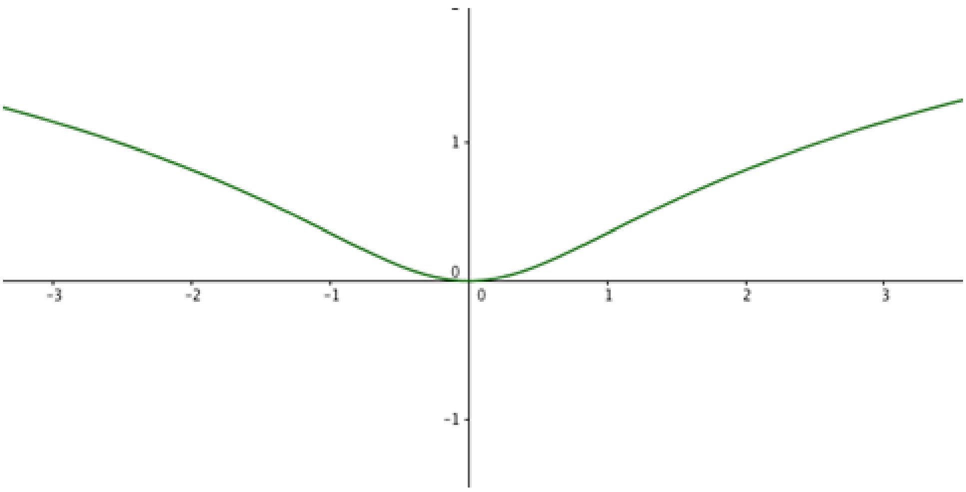
Δ5. Επειδή $[A_f = \mathbb{R}$ δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Για τις πλάγιες ασύμπτωτες:

$\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

$\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln\sqrt{x^2+1}\right) = +\infty$

Οπότε δεν έχουμε πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$, ομοίως και στο $-\infty$.
Ο πίνακας μεταβολών της φ είναι:

x	$-\infty$ -1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	+
$f''(x)$	-	+	+	-
$f(x)$				
	Σ.Κ.	min	Σ.Κ.	



Δ6. Για κάθε $x \in [1, +\infty)$ είναι:

$2f(x) = x + \ln\frac{2}{e} \Leftrightarrow$

$2f(x) = x + \ln 2 - \ln e \Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$

Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $\mathrm{B}\left(1, \ln\sqrt{2}\right)$ είναι:

(ε): $y - \frac{1}{2}\ln 2 = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow$

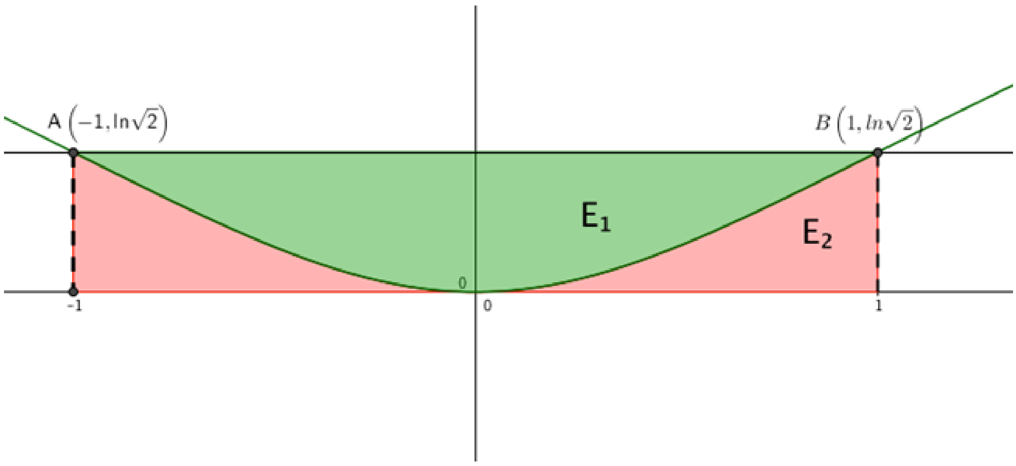
$y - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$

Και επειδή f κυρτή στο $x \in [1, +\infty)$ ισχύει:
$f(x) \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$ και το " = " ισχύει μόνο για το σημείο καμπής δηλαδή για $x = 1$.

Άρα είναι: $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 \Leftrightarrow x = 1$

Δ7. Για το εμβαδόν του χωρίου E_2



Για κάθε $x \in [-1,1]$ είναι $f(x) \geq 0$ και άρα:

$$\mathrm{E}_2 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \ln\sqrt{x^2+1}dx \overset{f:\alpha\rho\tau\iota\alpha}{=} 2\cdot\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+1}dx =$$

$$= 2\cdot\int_0^1 (x)'\ln\sqrt{x^2+1}dx = 2\left(\left[x\cdot\ln\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)' dx\right) =$$

$$= 2\left(\ln\sqrt{2} - 0 - \int_0^1 x\cdot\frac{x}{x^2+1}dx\right) = 2\ln\sqrt{2} - 2\cdot\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \ln 2 - 2\left(\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+1}dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx\right) =$$

$$= \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \ln 2 - 2 + 2I_1$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$$

Θέτω $x = \varepsilon\varphi t \Rightarrow dx = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt = (1+\varepsilon\varphi^2 t)dt$

Για $x = 0:\ \varepsilon\varphi t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Για $x = 1:\ \varepsilon\varphi t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 t}(1+\varepsilon\varphi^2 t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}$$

Επομένως, $\mathrm{E}_2 = \ln 2 - 2 + 2\cdot\frac{\pi}{4} = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ $\tau.\mu.$

Για το εμβαδόν του χωρίου E_1 : $\mathrm{E}_1 = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) - \mathrm{E}_2 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln 2 - \left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$ $\tau.\mu.$

Τελικά, $\frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}_1} = \frac{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}}{2-\frac{\pi}{2}} = \frac{\ln 2 - (2-\frac{\pi}{2})}{2-\frac{\pi}{2}} = \frac{\ln 2}{2-\frac{\pi}{2}} - 1 = \frac{2\ln 2}{4-\pi} - 1 = \frac{\ln 4}{4-\pi} - 1$.

Δ8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+x}{f(x)+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x^2+1}+x}{\ln\sqrt{x^2+1}+e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\sqrt{x^2+1}+x\right)'}{\left(\ln\sqrt{x^2+1}+e^x\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x^2+1}+1}{\frac{x}{x^2+1}+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+x^2+1}{x^2+1}}{\frac{x+(x^2+1)e^x}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x+(x^2+1)e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{2xe^x+(x^2+1)e^x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x(x^2+1+4x+2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x(x^2+4x+3)}=0$