

ΤΟ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΕ ΔΡΑΣΗ

Βέροια 11/2/2018

ΘΑΝΑΣΗΣ ΞΕΝΟΣ



thanasixenos@yahoo.gr



Thanasis Xenos



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

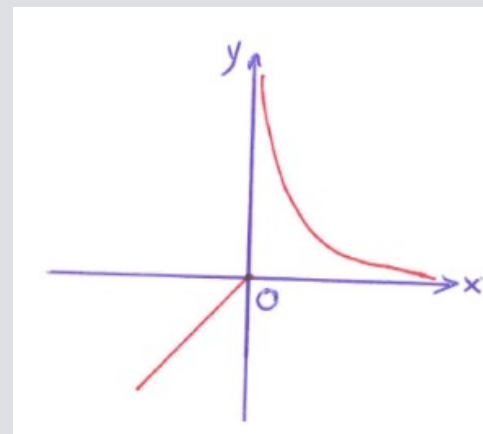
1) Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1, τότε είναι γνησίως μονότονη;



- Η πρόταση δεν αληθεύει, διότι για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \text{ είναι 1-1 και δεν είναι γνησίως μονότονη.}$$

- Το ερώτημα που τίθεται είναι σε ποια περίπτωση θα είναι βέβαιο ότι ισχύει η παραπάνω πρόταση. Αποδεικνύεται, με χρήση του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, η πρόταση: Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ , τότε είναι γνησίως μονότονη στο Δ .



2. Να εξετασθεί αν ισχύει η πρόταση: «Μια συνάρτηση f έχει ελάχιστο και μέγιστο, αν και μόνο αν υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\kappa \leq f(x) \leq \lambda$ για κάθε $x \in D_f$ »



- Αν η f έχει ελάχιστο το $\kappa = f(x_1)$ και μέγιστο το $\lambda = f(x_2)$, τότε $\kappa \leq f(x) \leq \lambda$ για κάθε $x \in D_f$.
- Το αντίστροφο δεν αληθεύει, αφού, για παράδειγμα, αν $f(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$, τότε $-2 \leq f(x) \leq 3$, χωρίς η f να έχει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 3. (Τα ακρότατα είναι φράγματα, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο).



3. Γιατί η μορφή $(+\infty)+(-\infty)$ ενός ορίου είναι απροσδιόριστη;



- Αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = -\frac{1}{x^2}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 0$$

- Αν $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ και $g(x) = -\frac{1}{x^2}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$

$$\text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 1$$

- Αν $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$ και $g(x) = -\frac{1}{x^2}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

Παρατηρούμε ότι το όριο εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που

παιρνουμε και γι' αυτό η μορφή $(+\infty)+(-\infty)$ είναι απροσδιόριστη.

➤ Για την απροσδιόριστη μορφή $\infty \cdot 0$, μπορούμε να πάρουμε τις συναρτήσεις (για το όριο στο 0)

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = x^2$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = 2x^2$

3) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ και $g(x) = x^2$

➤ Για την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ μπορούμε να πάρουμε τις συναρτήσεις (για το όριο στο 0)

1) $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$

2) $f(x) = x^2$ και $g(x) = 2x^2$

3) $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^4$

4) $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$



4) Είναι σωστός ο παρακάτω ορισμός;
«Δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο»



Δεν είναι σωστός.

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^4$ με κοινό πεδίο ορισμού

$A = \{-1, 0, 1\}$ είναι ίσες και όμως δεν έχουν τον ίδιο τύπο.



5.Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt[n]{x^\mu}$ και $g(x) = x^{\frac{\mu}{n}}$ ($\mu \in \mathbb{N}^*$) είναι ίσες»



Δεν είναι σωστός.

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ δεν είναι ίσες, διότι $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = [0, +\infty)$. Ανάλογη απάντηση έχουμε και για τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x^\nu$ και $g(x) = \nu \ln x$.



6) Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;
«Δεν υπάρχει συνάρτηση που να είναι συγχρόνως άρτια και περιττή»



Δεν είναι σωστός.

Οι ισότητες $f(-x)=f(x)$ και $f(-x)=-f(x)$ αληθεύουν συγχρόνως για την συνάρτηση $f(x)=0$.



7. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Αν κοντά στο x_0 ισχύει $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda$

και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \mu > \lambda$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in [\lambda, \mu]$ ».



Δεν είναι σωστός, διότι μπορεί να μην έχει όριο η f στο x_0 . Για παράδειγμα, ισχύει

$2 < \frac{|x|}{x} < 3$, $\lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3$ και η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$ δεν έχει όριο στο 0.



8. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Αν η f ορίζεται κοντά στο x_0 με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$, τότε και

$$\lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = \lambda \text{ »}.$$



Προφανώς, ισχύει το αντίστροφο, αλλά αυτή η πρόταση δεν είναι σωστή, αφού με δεδομένο ότι ορίζεται η f κοντά στο x_0 , αυτό σημαίνει ότι ορίζεται σε σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (a, x_0) ή (x_0, β)

Για παράδειγμα, αν $f(x) = \sqrt{x-1}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, και δεν έχει νόημα το

όριο από αριστερά στο 1.



9. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

$$\text{«Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 0 \text{»}.$$



Δεν είναι σωστός, για δύο λόγους.

i) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$$

έχει την απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) + (-\infty)$.

ii) Είναι δυνατόν η f να ορίζεται δεξιά στο x_0 και η g αριστερά στο x_0 , οπότε να

μην έχει νόημα το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, όπως συμβαίνει με το

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} + \sqrt{-x})$$

$\rightarrow 0$



10. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f^2(x) = g^2(x)$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$ ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in A$ ».



Δεν είναι σωστός.

Για παράδειγμα, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) = x^2$, τότε μπορεί να ισχύει

i) $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = -x, x \in \mathbb{R}$

iii) $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$

iv) $f(x) = -|x|, x \in \mathbb{R}$

v) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ -x, & x \geq 1 \end{cases}$

vi) $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 2 \\ -1, & x = 2 \end{cases}$ κ.λπ.

Άπειρες συναρτήσεις επαληθεύουν την εξίσωση $f^2(x) = x^2$.

Ανάλογο συμπέρασμα έχουμε για την ισοδύναμη εξίσωση $|f(x)| = |g(x)|$



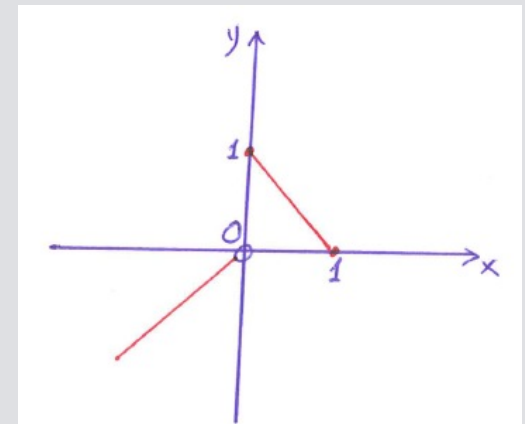
11. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε είναι συνεχής και στα σημεία a και β ».



Δεν είναι σωστός.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και όμως δεν είναι συνεχής στο 0.

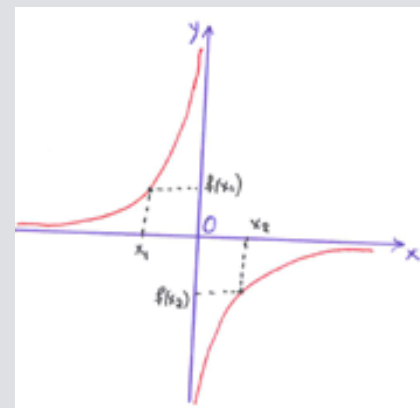


12. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 , τότε είναι γνησίως αύξουσα και στο $\Delta_1 \cup \Delta_2$ ».

Δεν είναι σωστός.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, ενώ δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$, αφού για $x_1 < 0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

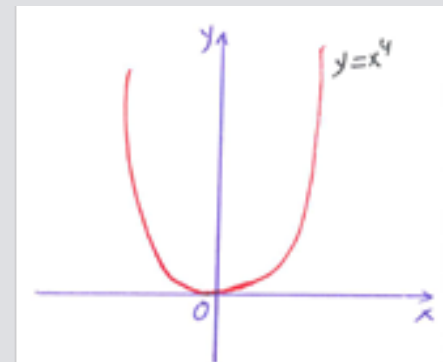


13) Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;
«Αν οι f και g είναι γνησίως αύξουσες σε διάστημα Δ , τότε
και η $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ ».



Δεν είναι σωστός.

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x)=x$ και $g(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$, ενώ η συνάρτηση $(f \cdot g)(x)=x^4$ δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



14. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι 1-1, τότε και η $f+g$ είναι 1-1».



Δεν είναι σωστός.

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=1-x^3$ είναι 1-1, ενώ η $(f+g)(x)=1$ δεν είναι 1-1.



15. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

$$\text{«Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \text{ ή } -\lambda\text{»}.$$



Δεν είναι σωστός, διότι είναι δυνατόν η f να μην έχει όριο στο x_0 . Για παράδειγμα, η

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \text{ δεν έχει όριο στο } 0, \text{ ενώ ισχύει } \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1.$$

Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει στην περίπτωση $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = \lambda^2$

Ισχύουν όμως οι ισοδυναμίες:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{i) } |f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \\ \text{ii) } \lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x)} = 0 \text{ κ λπ.} \end{array} \right)$$



16. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ».



Δεν είναι σωστός.

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = x\sqrt{x}$ και $g(x) = x\sqrt{-x}$ είναι παραγωγίσιμες στο 0 με $f'(0) = g'(0) = 0$, ενώ η συνάρτηση $(f+g)(x) = x(\sqrt{x} + \sqrt{-x})$ ορίζεται μόνο για $x=0$ και δεν έχει νόημα να μιλάμε για παράγωγο της $f+g$.



17. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε οι C_f, C_g έχουν παράλληλες εφαπτόμενες στο σημείο με τετμημένη x_0 , αν και μόνο αν ισχύει $f'(x_0) = g'(x_0)$ ».



- Αν οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες, τότε προφανώς ισχύει $f'(x_0) = g'(x_0)$.
- Αν όμως $f'(x_0) = g'(x_0)$, τότε είναι δυνατόν να ισχύει $f(x_0) = g(x_0)$ και έτσι οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη x_0 .



18. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Αν $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, τότε η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 μόνο όταν $\alpha > 1$ ».



$$\text{Είναι } D_f = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{αν } \alpha > 0 \\ (0, +\infty), & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\text{Για } \alpha > 0 \text{ έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, & \text{αν } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{αν } \alpha < 1 \end{cases}$$

Άρα, ο ισχυρισμός είναι σωστός.



19. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

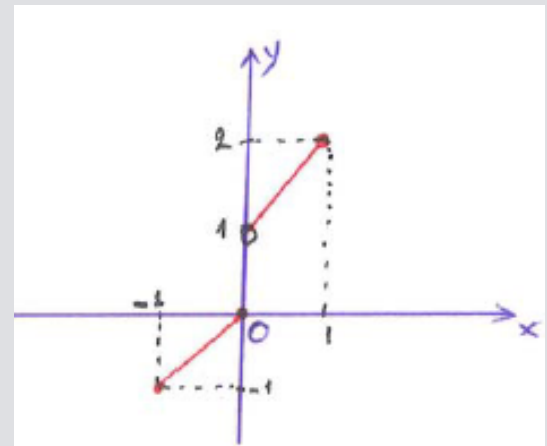
«Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[a, \beta]$ και $f(a) < k < f(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ με $f(x_0) = k$ ».



Ο ισχυρισμός δεν είναι σωστός, αφού δεν γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Για παράδειγμα, αν $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 0 \\ x+1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[-1, 1]$

και ισχύει $f(-1) < \frac{1}{2} < f(1)$, ενώ η f δεν παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$.



20. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ ».

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, όπου $\alpha_n \neq 0$ και n

περιττός. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_n x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \alpha_n > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \alpha_n < 0 \end{cases}$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } \alpha_n > 0 \\ +\infty, & \text{αν } \alpha_n < 0 \end{cases}.$$

Επειδή η συνάρτηση P είναι συνεχής, παίρνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή και άρα $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- **Άμεσο συμπέρασμα:** Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
- Δεν ισχύει ο ισχυρισμός για πολυωνυμική συνάρτηση άρτιου βαθμού.

Για παράδειγμα, η $f(x) = x^2 + 1$ έχει σύνολο τιμών το $[1, +\infty)$.



21. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $x_0 \in \Delta$ με $f'(x_0) = 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f ».



Δεν είναι σωστός, αφού για παράδειγμα αν $f(x)=x^3$, τότε $f'(0)=0$ και η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο 0 (f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$).

Ομοίως, αν $f''(x_0) = 0$, τότε δεν σημαίνει ότι η f παρουσιάζει καμπή στο 0.

Για παράδειγμα, η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ κι όμως $f''(0) = 0$.



22. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε το

χωρίο $\Omega = \{C_f, x', x = a, x = \beta\}$ έχει εμβαδόν $E = \left| \int_a^\beta f(x) dx \right|$ ».



Δεν είναι σωστός, διότι $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, οπότε $-\int_a^\beta |f(x)| dx \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta |f(x)| dx$,

δηλαδή $\left| \int_a^\beta f(x) dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)| dx$.

Προφανώς, αληθεύει μόνο όταν για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ ή $f(x) \leq 0$.



23. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, με

$\int_a^\beta f(x) dx > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ ».



Λάθος, αφού π.χ. $\int_{-1}^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 = \frac{3}{2} > 0$, ενώ η $f(x)=x$ δεν είναι θετική στο

διάστημα $[-1, 2]$.



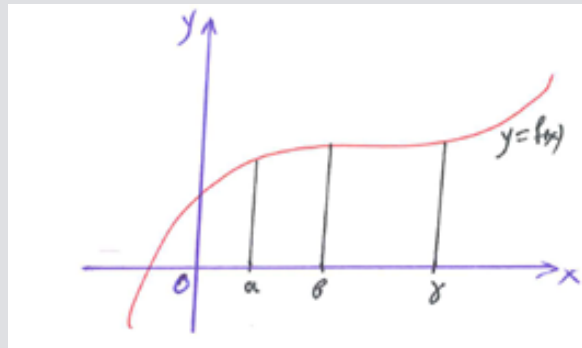
24. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός;

«Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$

με $\gamma \notin [\alpha, \beta]$, τότε δεν ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$ ».



Λάθος, διότι ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx - \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$



25. «Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ , τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ ».



Ο ισχυρισμός δεν είναι σωστός.

- Για παράδειγμα, η $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ ισχύει $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \quad \text{και} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \text{για κάθε}$$

$$x_0 \in \Delta.$$



26. «Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σ' ένα διάστημα Δ , τότε ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ ».



Λάθος. Το σωστό είναι $f''(x) \geq 0$ (όπως παραπάνω). Για παράδειγμα, η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ κι όμως $f''(x)=12x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



27. «Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ με $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ ».



- Λάθος. Για παράδειγμα, αν $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$, τότε $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά απλώς αύξουσα.
- Αποδεικνύεται ότι, αν $f'(x) \geq 0$ και τα σημεία μηδενισμού της f' δεν συνιστούν διάστημα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ .



28. «Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη. Ισχύουν οι συνεπαγωγές:

- i) f' περιττή $\Rightarrow f$ άρτια
- ii) f' άρτια $\Rightarrow f$ περιττή;»



i) Από την $f'(-x) = -f'(x)$ βρίσκουμε $f(-x) = f(x) + c$, η οποία για $x=0$ δίνει $c=0$.

Άρα, ισχύει αυτή η συνεπαγωγή.

ii) Από την $f'(-x) = f'(x)$ βρίσκουμε $f(-x) = -f(x) + c$, η οποία για $x=0$ δίνει $c=2f(0)$.

Έτσι, η συνεπαγωγή αυτή αληθεύει μόνο όταν $f(0)=0$, δηλαδή η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



29. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός; «Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη, τότε οι συναρτήσεις $f^{-1} \circ f$ και $f \circ f^{-1}$ είναι ίσες».



- Για κάθε $x \in A$ ισχύει $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$, δηλαδή η συνάρτηση $f^{-1} \circ f$ είναι ταυτοτική στο A .
- Για κάθε $y \in f(A)$ ισχύει $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$, δηλαδή η συνάρτηση $f \circ f^{-1}$ είναι ταυτοτική στο $f(A)$. Άρα, $f^{-1} \circ f \neq f \circ f^{-1}$. (Θα ισχύει $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$ μόνο όταν $f(A) = A$).

Παράδειγμα: Για τις αντίστροφες συναρτήσεις $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x, x > 0$ έχουμε $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\ln x} = x, x > 0$ και $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln e^x = x, x \in \mathbb{R}$



30.Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός; «Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ δεν μπορεί να έχει κοινά σημεία με μια ασύμπτωτη αυτής».



Δεν αληθεύει.

Παραδείγματα:

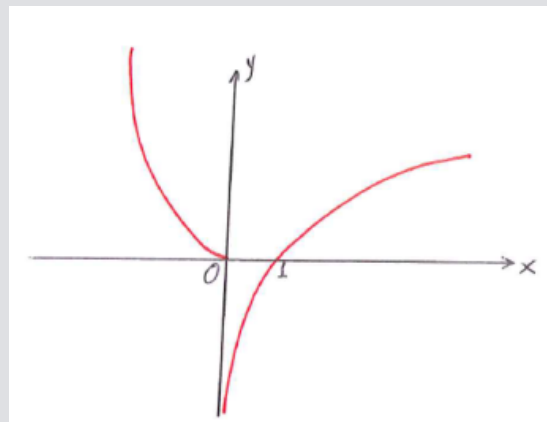
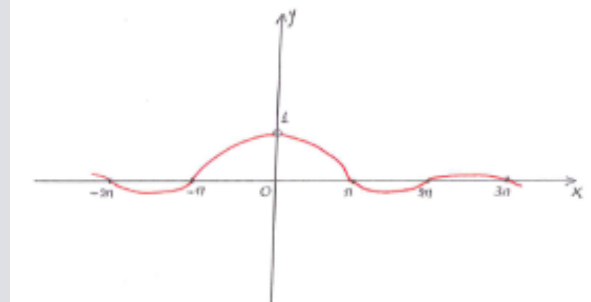
1) Η $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ έχει όριο 0 στο $+\infty$ και $-\infty$, οπότε η Cf έχει ασύμπτωτη τον

άξονα $x'x$ κι όμως έχει κοινά σημεία με τον $x'x$ όλα τα σημεία $M(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}^*$.

2) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον

$y'y$ κι όμως έχει κοινό σημείο με αυτόν.



31. Είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός; «Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ έχει την

απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε δεν υπάρχει

και το πρώτο όριο».



Δεν αληθεύει.

Παράδειγμα:

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}) = 0$, ενώ

το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}\right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} + \eta\mu \frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει.

Η $f(x) = \eta\mu x$ δεν έχει όριο στο $+\infty$ (ούτε στο $-\infty$) και αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

Εστω ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Υποχρεωτικά θα είναι $-1 \leq \lambda \leq 1$.

- Θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x - \pi) = \lambda$, αλλά $f(x - \pi) = -\eta\mu x$ και άρα $\lambda = 0$.
- Επίσης, θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \lambda = 0$, δηλ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu x = 0$, που

είναι άτοπο, διότι $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$.



32. Είναι δυνατόν μια συνεχής συνάρτηση να μην έχει τοπικό ακρότατο σε άκρο διαστήματος;



- Αν μια συνεχής συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα, είναι γνησίως μονότονη, τότε σε κάθε άκρο του Δ (που ανήκει στο Δ) έχει ακρότατο.
- Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι δυνατόν να μην έχει τοπικό ακρότατο σε κάποιο άκρο του Δ .

Παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Θα διαπιστώσουμε ότι η τιμή $f(0)=0$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .

Θεωρούμε τις τιμές $x_1 = \frac{1}{2r\pi}$ και $x_2 = \frac{1}{2r\pi + \pi}$, $r \in \mathbb{N}^*$. Καθώς $r \rightarrow +\infty$, οι τιμές

αυτές είναι οσοδήποτε κοντά στο 0. Ισχύει $f(x_1) = \left(\frac{1}{2r\pi}\right)^2 > 0$ και

$f(x_2) = -\left(\frac{1}{2r\pi + \pi}\right)^2 < 0$, δηλαδή οσοδήποτε κοντά στο 0 η f παίρνει θετικές και

αρνητικές τιμές. Άρα, η τιμή $f(0)=0$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .



33. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος $\Delta \subseteq D_f$, τότε η f αλλάζει μονοτονία εκατέρωθεν του x_0 ;



Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2(2 + \eta\mu \frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 0$, διότι $x^2(2 + \eta\mu \frac{1}{x}) \geq 0 = f(0)$.
- Για $x \neq 0$ ισχύει $f'(x) = 4x + 2x\eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\nu \frac{1}{x}$

Αν θεωρήσουμε κοντά στο 0 τα σημεία $x_1 = \frac{1}{2\nu\pi}$ και $x_2 = \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$ και

$\nu \rightarrow +\infty$, τότε $f'(x_1) = \frac{2}{\nu\pi} - 1 < 0$ και $f'(x_2) = \frac{6}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}} > 0$, που σημαίνει ότι δεξιά

του 0 η $f'(x)$ δεν διατηρεί πρόσημο.

Ακριβώς το ίδιο συμβαίνει και αριστερά του 0.



34. Αν μια συνεχής συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ δεν μηδενίζεται στο σύνολο A , τότε διατηρεί πρόσημο στο A .



Δεν αληθεύει. Αληθεύει μόνο αν το A είναι διάστημα.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$, δεν μηδενίζεται και δεν διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}^*$.

