

ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ.Κωτσάκης, Βέροια 11/2/2018



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

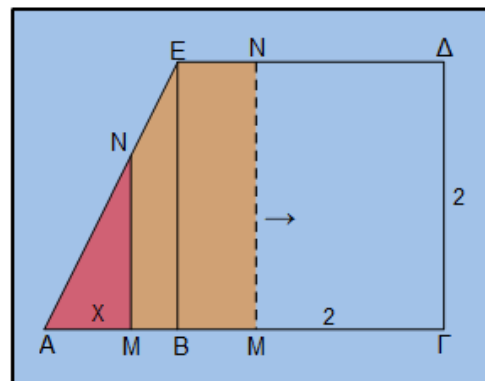
ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο **Άσκηση 4 σχολικού βιβλίου σελ. 29 - βελτιωμένη**

Στο σχήμα το ΒΓΔΕ είναι τετράγωνο έχει πλευρά 2 και ισχύει ότι: $AB = 1$, $A\Gamma = 3$, $AM = x$, με $MN \perp AB$.

Αν το σημείο M διαγράφει το τμήμα ΑΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που



διαγράφεται, δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & , \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$

β) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + \sigma\upsilon\nu x + 3x - 1}{f(x) + \eta\mu x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να βρείτε την αντίστροφή της και να κάνετε τη γραφική της παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων με αυτή της f.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f , $C_{f^{-1}}$ και την ευθεία με εξίσωση: $x = 3$.



Λύση

α) • Αν $0 < x \leq 1$, τότε $\hat{AMN} \approx \hat{ABE}$ οπότε: $\frac{x}{1} = \frac{MN}{2} \Leftrightarrow MN = 2x$, και το εμβαδόν

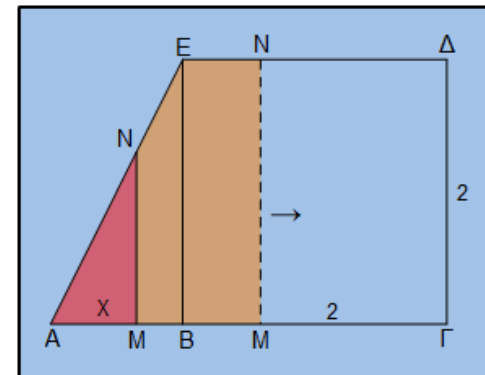
του τριγώνου AMN είναι: $E(x) = \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2$.

• Αν $1 \leq x \leq 3$, από το τραπέζιο AMNE που σχηματίζεται, το εμβαδόν είναι:

$$E(x) = \frac{(x + x - 1) \cdot 2}{2} = \frac{(2x - 1) \cdot 2}{2} = 2x - 1.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \eta \mu \left(\frac{1}{x} \right) + \sigma \upsilon \nu x + 3x - 1}{f(x) + \eta \mu x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta \mu \left(\frac{1}{x} \right) + \sigma \upsilon \nu x + 3x - 1}{x^2 + \eta \mu x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \eta \mu \left(\frac{1}{x} \right) + 3 + \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x}}{x + \frac{\eta \mu x}{x}} = \frac{0 + 3 + 0}{0 + 1} = 3.$$



γ) Η συνάρτηση f ως γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$, είναι αντιστρέψιμη και

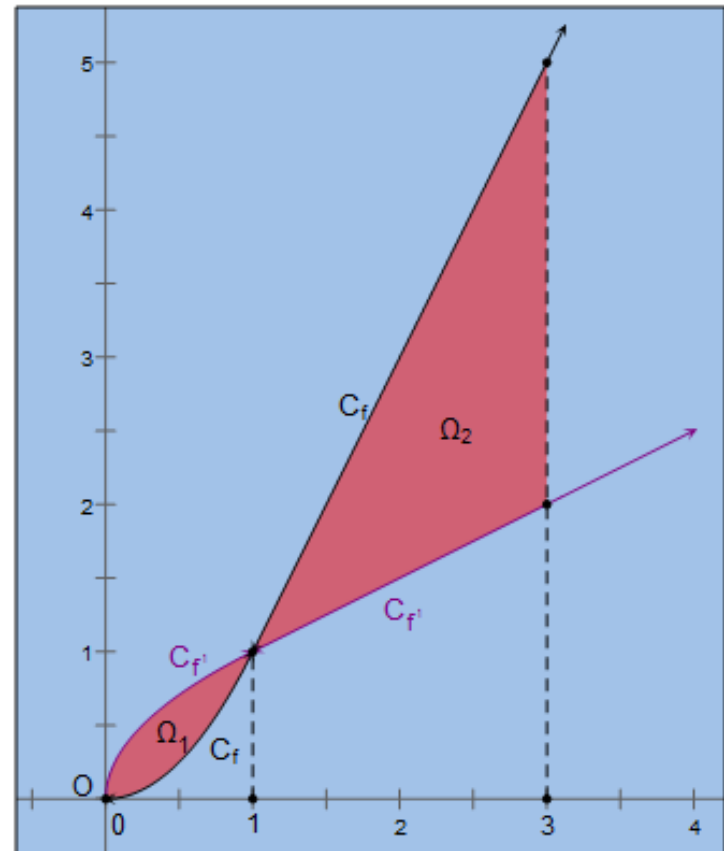
$$\text{έχει τύπο: } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & , \quad 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

δ) Το $E(\Omega)$ υπολογίζεται από το άθροισμα των εμβαδών στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,3]$ και παίρνουμε:

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) =$$

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx + \int_1^3 \left(2x - 1 - \frac{1}{2}(x+1) \right) dx = \frac{10}{3},$$

τετραγωνικές μονάδες.



ΘΕΜΑ 2^ο Άσκηση 4 σχολικού σελ. 132 –βελτιωμένη

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι $|f'(x)| \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι ισχύει:

$$\left| \ln \frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} \right| \leq |\alpha - \beta|, \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

γ) Να μελετηθεί ως προς τα κοίλα-κυρτά μέρη και να αποδείξετε ότι η C_f έχει δύο σημεία καμπής των οποίων να βρείτε τις συντεταγμένες.

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων στα σημεία καμπής και να αποδείξετε

ότι ισχύει: $\ln\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) \leq x - 1$, για κάθε $x \geq 1$.



Λύση

α) Η παράγωγος της f είναι: $f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$

Ισχύουν: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, κ. λ. π.

β) Ισχύει: $|f'(x)| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow 2|x| \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 \geq 0$, αληθής $\forall x \in \mathbb{R}.$

- Για $\alpha = \beta$, η σχέση ισχύει ως ισότητα.
- Για $\alpha \neq \beta$, έστω $\alpha < \beta$, η f ικανοποιεί στο $\Delta = [\alpha, \beta]$ της συνθήκες Θ.Μ.Τ.

Επομένως υπάρχει της τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \Leftrightarrow (\alpha - \beta)f'(\xi) = \ln(\alpha^2 + 1) - \ln(\beta^2 + 1) \Leftrightarrow (\alpha - \beta)f'(\xi) = \ln\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1}\right).$$

Παίρνοντας την απόλυτη τιμή, με δεδομένο ότι $|f'(x)| \leq 1$, προκύπτει η ανισότητα.



γ) Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f είναι: $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

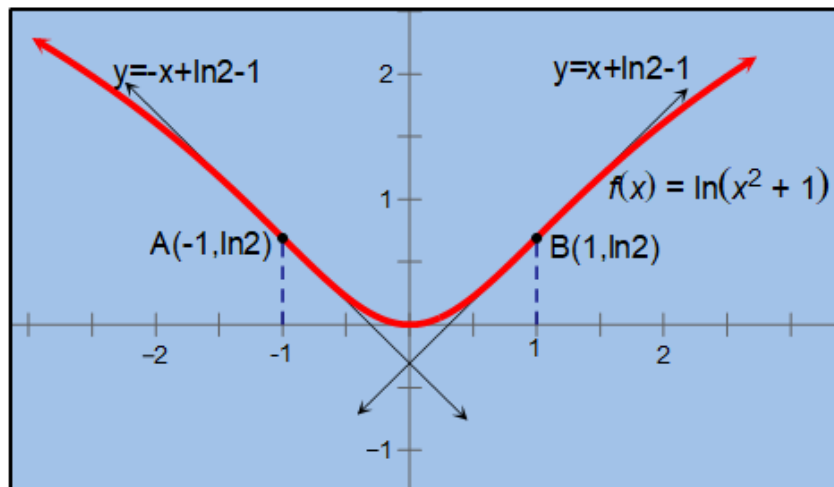
Οι ρίζες της $f''(x) = 0$ και το πρόσημό της $f''(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\curvearrowright$	$\sigma.K.$ $\ln 2$	$\curvearrowleft$	0	$\curvearrowright$	$+\infty$

Στις θέσεις $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$, η συνάρτηση παρουσιάζει καμπή και τα σημεία καμπής είναι τα: $A(-1, \ln 2)$ και $B(1, \ln 2)$.



δ) Οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_f στα σημεία καμπής A και B αντίστοιχα είναι: $y = -x + \ln 2 - 1$ και $y = x + \ln 2 - 1$.



Για $x \geq 1$, η f είναι κοίλη, οπότε η καμπύλη βρίσκεται «κάτω της εφαπτομένης»

Επομένως ισχύει: $f(x) \leq x + \ln 2 - 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) \leq x + \ln 2 - 1 \Leftrightarrow$

$$\ln(x^2 + 1) - \ln 2 \leq x - 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) \leq x - 1.$$



ΘΕΜΑ 3^ο Άσκηση 7 σχολικού σελ. 132 –βελτιωμένη

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = (e^{\alpha} - \alpha) \cdot 2^x \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 + 2x + \ln \beta + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Αν τα σημεία $A(0, y_1)$ και $B(1, y_2)$ είναι κοινά των παραστάσεων C_f, C_g τότε:

α) Να δείξετε ότι: $\alpha = 0$ και $\beta = 1$.

β) Να δείξετε ότι οι C_f, C_g , δεν έχουν άλλα κοινά σημεία εκτός των A και B .

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq g(x)$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση των f, g στο ίδιο σύστημα αξόνων και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g .



Λύση

$$\alpha) \text{ Ισχύει: } \begin{cases} f(0) = g(0) \\ f(1) = g(1) \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\alpha} - \alpha - 1 = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} .$$

Η εξίσωση $e^{\alpha} - \alpha - 1 = 0$, έχει προφανή ρίζα τον αριθμό 0. Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(\alpha) = e^{\alpha} - \alpha - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών βασικών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με παράγωγο την $h'(\alpha) = e^{\alpha} - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Από τον πίνακα φαίνεται ότι η συνάρτηση h έχει ελάχιστη τιμή 0, για $\alpha = 0$.

Άρα οι τιμές των α , β είναι: $\alpha = 0$ και $\beta = 1$.

α	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(\alpha)$	-	0	+
$h(\alpha)$	$+\infty$	$\searrow \quad \min \quad \nearrow$ 0	$+\infty$



β) Για $\alpha = 0$ και $\beta = 1$, οι τύποι των συναρτήσεων f, g , παίρνουν τη μορφή:

$$\boxed{f(x) = 2^x} \text{ και } \boxed{g(x) = -x^2 + 2x + 1}$$

Έστω ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν και 3ο κοινό σημείο το $\Gamma(\kappa, y)$ με

$\kappa \neq 0, 1$ π.χ. $0 < 1 < \kappa$. Για τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - g(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$,

ισχύουν: $\varphi'(x) = 2^x \ln 2 + 2x - 2$ και $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(\kappa) = 0$.

- Επομένως ισχύει το Θ.Rolle στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, \kappa]$, άρα υπάρχουν δύο τουλάχιστον αριθμοί $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, \kappa)$ ώστε: $\varphi'(x_1) = \varphi'(x_2) = 0$.

- Για τη συνάρτηση φ' ισχύει: $\varphi''(x) = 2^x (\ln 2)^2 + 2$, και $\varphi'(x_1) = \varphi'(x_2) = 0$.

Επομένως ισχύει και γι' αυτή το Θ.Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε: $\varphi''(\xi) = 0$. Αυτό όμως άτοπο διότι:

$$\varphi''(x) = 2^x (\ln 2)^2 + 2 > 0, \quad \forall \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$



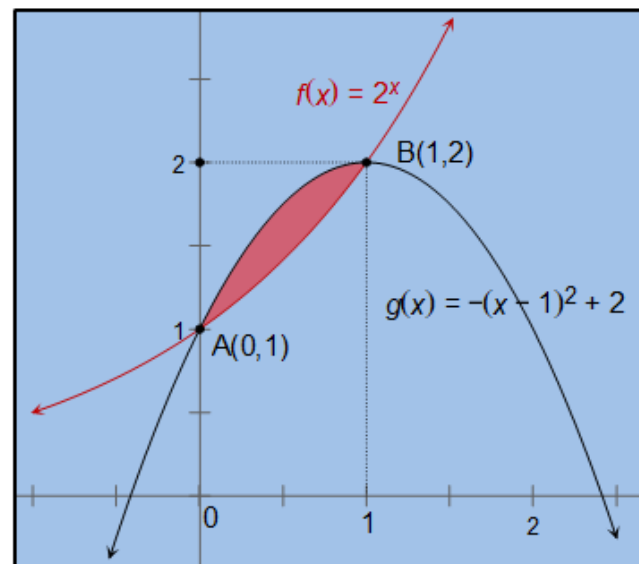
γ) Ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [0,1]$.

Η $\varphi(x) = f(x) - g(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$, είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και $\varphi(x) \neq 0$, στο διάστημα $(0,1)$. Άρα από τις συνέπειες του θεωρήματος του Bolzano, η φ

διατηρεί σταθερό το πρόσημό της στο $(0,1)$. Επειδή $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -0,35 < 0$, θα ισχύει

$\varphi(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

δ) Η συνάρτηση g γράφεται για τη γραφική της παράσταση: $g(x) = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$, ή αλλιώς βρίσκουμε την κορυφή της B με τον τύπο $B\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$, γνωρίζοντας ότι έχει άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία: $x = -\beta/2\alpha$.



$$\bullet E(\Omega) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^1 (-x^2 + 2x + 1 - 2^x) dx = \dots$$



ΘΕΜΑ 4^ο Άσκηση 3 σχολικού σελ. 151 – βελτιωμένη

Έστω οι συναρτήσεις: $f(x) = e^x$, $g(x) = x + 1$ για $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = \frac{e}{x}$, με $x > 0$.

α) Με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x > x + 1$, για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$2f(x) - 2g(x) > x^2.$$

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_h των f, h αντίστοιχα και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_h τους άξονες $x'x, y'y$ και την ευθεία $\varepsilon: x = \mu, \mu > 0$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{E(\mu) + \ln \mu}{e^\mu - \mu - 1}$ ii) $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{E(\mu) + \mu^2}{e^\mu + \mu + 1}$.



Λύση

α) Η ανισότητα $2f(x) - 2g(x) > x^2$ ισοδυναμεί με την: $2e^x - 2x - 2 - x^2 > 0$.

Έστω η συνάρτηση: $\varphi(x) = 2e^x - 2x - 2 - x^2$, $x \in [0, +\infty)$ που έχει παράγωγο την

$\varphi'(x) = 2e^x - 2 - 2x = 2(e^x - x - 1)$. Ισχύει: $\varphi'(x) = 0$, για $x = 0$ και $\varphi'(x) > 0$, $x > 0$.

Από τον πίνακα μονοτονίας της φ προκύπτει ότι: $\varphi_{\min} = \varphi(0) = 0$. Άρα ισχύει

$\varphi(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή ισχύει: $2e^x - 2x - 2 - x^2 > 0$, για κάθε $x > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\min$ 0	$+\infty$



β) Οι γραφικές παραστάσεις των f και h έχουν μοναδικό σημείο το $A(1,e)$ διότι

από την ισότητα $e^x = \frac{e}{x}$, προκύπτει η εξίσωση: $xe^x = e \Leftrightarrow xe^x - e = 0$ και από τη

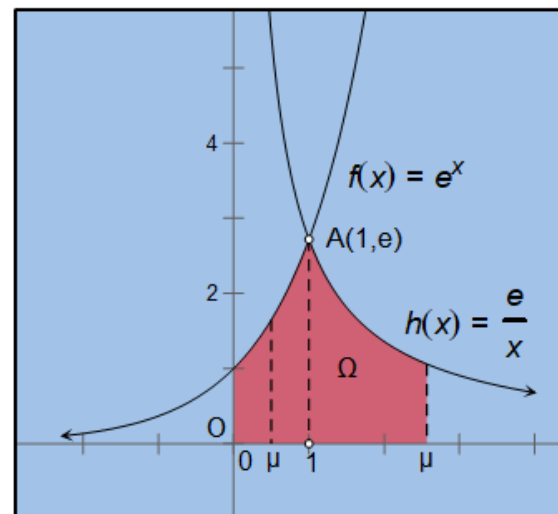
μελέτη της συνάρτησης $\kappa(x) = xe^x - e$, προκύπτει η μοναδικότητα της ρίζας $\rho = 1$.

- Αν $0 < \mu < 1$, το εμβαδόν του χωρίου είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^\mu e^x dx = [e^x]_0^\mu = e^\mu - 1, \text{ τετρ. μονάδες.}$$

- Αν $\mu > 1$, το εμβαδόν του χωρίου είναι:

$$E(\Omega) = \int_1^\mu \frac{e}{x} dx = e[\ln x]_1^\mu = e \ln \mu, \text{ τετρ. μονάδες.}$$



γ) Τα δύο όρια υπολογίζονται ως εξής:

$$\text{i)} \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{E(\mu) + \ln \mu}{e^\mu - \mu - 1} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{e^\mu - 1 + \ln \mu}{e^\mu - \mu - 1} \left(\frac{-\infty}{0} \right) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} (e^\mu - 1 + \ln \mu) \cdot \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^\mu - \mu - 1} = -\infty.$$

$$\text{ii)} \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{E(\mu) + \mu^2}{e^\mu + \mu + 1} = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{e \ln \mu + \mu^2}{e^\mu + \mu + 1} \left(\frac{+\infty}{+\infty}, \text{De'L} \right) = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e}{\mu} + 2\mu}{e^\mu + 1} \left(\frac{+\infty}{+\infty}, \text{De'L} \right) =$$

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{e}{\mu^2} + 2}{e^\mu} = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{e^\mu} \left(-\frac{e}{\mu^2} + 2 \right) \right\} = 0.2 = 0.$$



ΘΕΜΑ 5^ο

Άσκηση 6 σχολικού σελ. 152 – βελτιωμένη

α) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - \alpha)^2 (x - \beta)^2 (x - \gamma)^2, \text{ για } x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha < \beta < \gamma.$$

Να αποδείξετε ότι έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

β) Αν $g(x) = (x - \alpha)^v (x - \beta)^v (x - \gamma)^v$, με $\alpha < \beta < \gamma$ και v θετικός ακέραιος, τότε να βρείτε το πλήθος και το είδος των τοπικών ακρότατων της συνάρτησης g .



Λύση

α) Για τη συνάρτηση f προφανώς ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$. Έχει παράγωγο

τη συνάρτηση: $f'(x) = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)[3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma]$

Παρατηρούμε ότι και γι' αυτή ισχύει: $f'(\alpha) = f'(\beta) = f'(\gamma) = 0$. (1)

• Η f ικανοποιεί τις συνθήκες θεωρήματος Rolle στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$, άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και ένας τουλάχιστον αριθμός

$\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ ώστε να ισχύει: $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι η f' έχει 5 τουλάχιστον ρίζες. Το τριώνυμο της αγκύλης έχει $\Delta > 0$, επομένως οι ρίζες της $f'(x) = 0$, είναι ακριβώς πέντε ρίζες.

Από τον πίνακα πρόσημου της $f'(x)$, προκύπτει το ζητούμενο.



β) Το ερώτημα αυτό αποτελεί γενίκευση του α) ερωτήματος και διακρίνουμε τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

- Αν $v = 1$, τότε η συνάρτηση g παίρνει τη μορφή: $g(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$.

Έχει παράγωγο την $g'(x) = 3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$ με διακρίνουσα τον αριθμό: $\Delta = 2[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\alpha - \gamma)^2] > 0$. Άρα έχει 2 άνισες ρίζες και από τον πίνακα του πρόσημου, έχει ένα τοπ. μέγιστο και ένα τοπ. ελάχιστο.

- $v = 2\kappa$, τότε $g(x) = (x - \alpha)^{2\kappa}(x - \beta)^{2\kappa}(x - \gamma)^{2\kappa}$ και όπως η f του α) μέρους έχει τρία (3) τοπικά ελάχιστα και δύο (2) τοπικά μέγιστα.
- $v = 2\kappa + 1$, τότε $g(x) = (x - \alpha)^{2\kappa+1}(x - \beta)^{2\kappa+1}(x - \gamma)^{2\kappa+1}$ και όπως όταν $v = 1$, έχει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο.



ΘΕΜΑ 6^ο

Άσκηση 10 σχολικού σελ. 152 – όπως είναι

Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί την συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώσουν συμμετοχή ακριβώς 100, το αντίτιμο είναι 1000 ευρώ. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο μειώνεται κατά 5 ευρώ. Να βρείτε πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή ώστε να έχουμε τα περισσότερα έσοδα.

Υπόδειξη

Έστω x , τα άτομα που θα δηλώσουν συμμετοχή στην κρουαζιέρα με $x > 100$.

- Το ποσό που θα πληρώσει κάθε άτομο προκύπτει από $1000 - \text{έκπτωση}$, δηλαδή $1000 - (x - 100) \cdot 5 = 1500 - 5x$. Τα έσοδα τότε θα είναι:

$$E(x) = x \cdot (1500 - 5x) = -5x^2 + 1500x, \quad x > 100. \quad (\text{Απάντηση: } 150 \text{ άτομα})$$



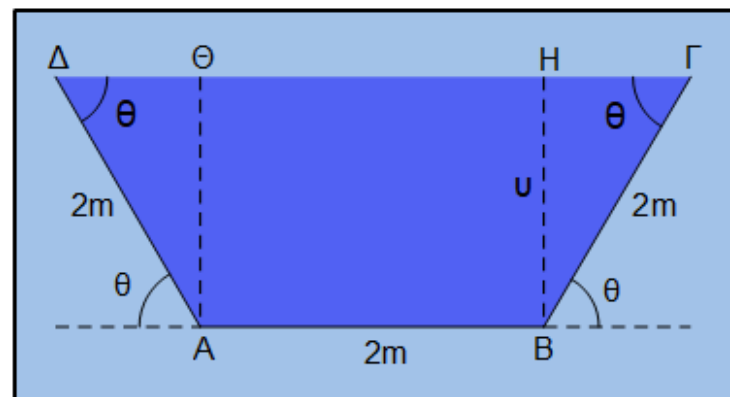
ΘΕΜΑ 7^ο Άσκηση 12 σχολικού σελ. 153 – βελτιωμένη

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι για να μεταφέρουμε ποσότητα νερού.

Η κάθετη διατομή του έχει το σχήμα του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής

είναι: $E(\theta) = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.



β) Να βρείτε τη γωνία θ , ώστε το κανάλι μεταφέρει τη μέγιστη ποσότητα νερού.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(\theta)$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $E(\theta) = 5$, για $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.



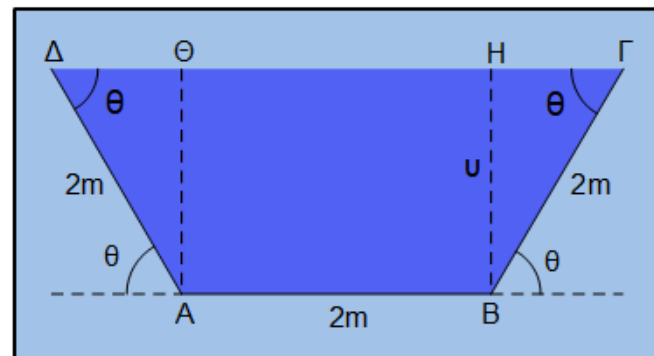
Λύση

α) Ισχύει: $\hat{B\Gamma H} = \hat{A\Delta\Theta}$, οπότε: $H\Gamma = \Delta\Theta = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ και $BH = u = 2\eta\mu\theta$.

Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

$$E(\theta) = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta), \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

β) $E'(\theta) = 4(2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1), \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$



$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\theta = -1 \text{ (απορρίπτεται)}$$

θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$		
$E'(\theta)$		+	0	-	
$E(\theta)$	0	$\curvearrowright$	$3\sqrt{3}^{\max} \approx 5,2$	$\curvearrowright$	4

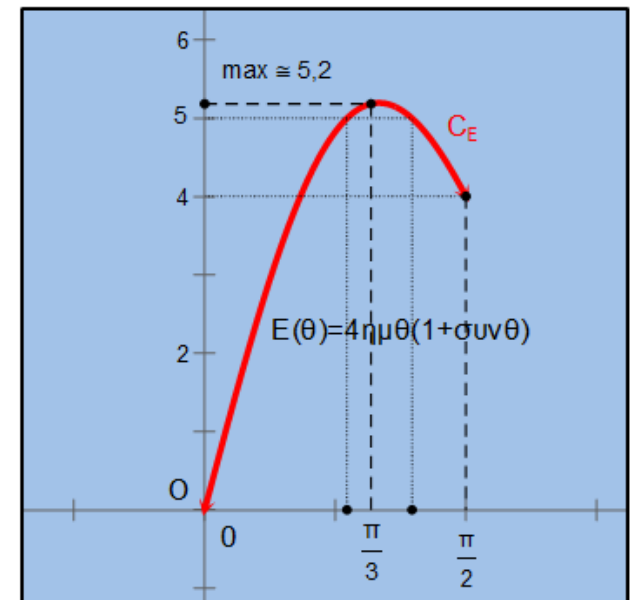


γ) Για τη γραφική παράσταση βρίσκουμε και τη δεύτερη παράγωγο της E που είναι:

$$E''(\theta) = -4\eta\mu\theta (1 + 4\sigma\upsilon\nu\theta), \text{ και ισχύει:}$$

$$E''(\theta) < 0, \forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$
$E'(\theta)$	+	0	−
$E''(\theta)$	−		−
$E(\theta)$	0	$\nearrow$ $3\sqrt{3} \overset{\text{max}}{\approx} 5,2$	$\searrow$ 4



Από τον πίνακα και τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι η συνάρτηση E είναι κοίλη σε όλο το διάστημα $[0, \pi/2]$.



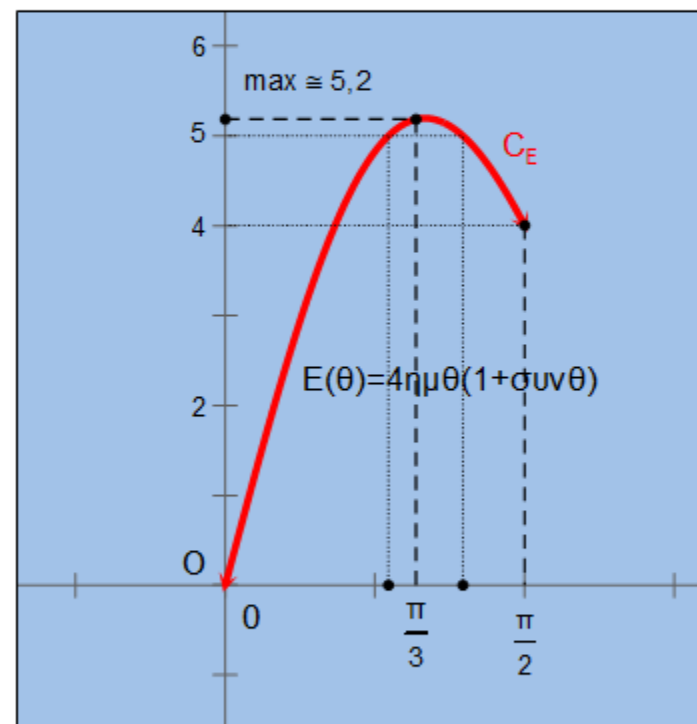
δ) Η συνάρτηση $E(\theta)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, άρα και στα $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$. Οι τιμές της $E(\theta)$ στα άκρα των διαστημάτων είναι:

$$E(0) = 0, \quad E\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 5,2 \quad \text{και} \quad E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.$$

Από το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών και τη μονοτονία της συνάρτησης $E(\theta)$, η εξίσωση $E(\theta) = 5$, έχει μοναδική λύση

σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

και $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα η εξίσωση $E(\theta) = 5$, έχει δύο λύσεις στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.



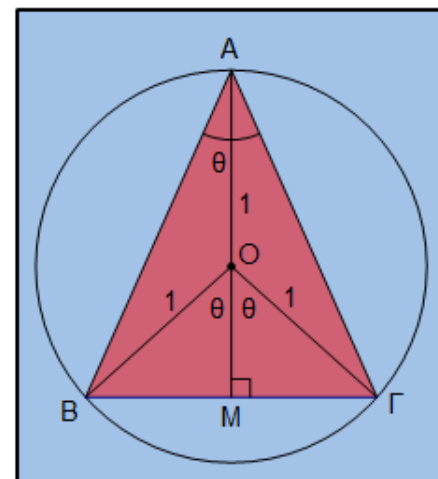
ΘΕΜΑ 8^ο Άσκηση 3 σχολικού σελ. 173 – όπως είναι

Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 1 και θ , είναι η γωνία των ίσων πλευρών του.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

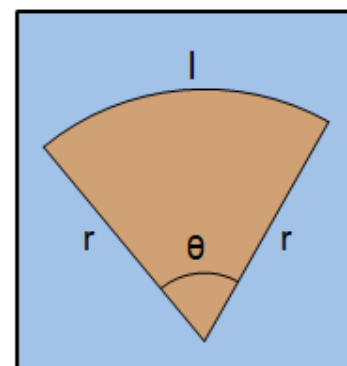
$$E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \eta\mu\theta, \quad \theta \in (0, \pi).$$

β) Να βρείτε για ποια τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$ το εμβαδόν $E(\theta)$ γίνεται μέγιστο.



ΘΕΜΑ 9^ο Άσκηση 4 σχολικού σελ. 173 –όπως είναι

Ένας ανθόκηπος έχει το σχήμα κυκλικού τομέα με ακτίνα r και γωνία θ rad. Διατίθεται για την περιφράξή του σύρμα που έχει μήκος 20m.



α) Να αποδείξετε ότι η γωνία θ είναι: $\theta = \frac{20 - 2r}{r}$, $r \in (0, 10)$.

β) Να βρείτε την ακτίνα του ανθόκηπου αν θέλουμε ο κήπος να έχει την μέγιστη δυνατή επιφάνεια.



Υπενθύμιση για τους μαθητές :

α) Για το παραπάνω θέμα χρειάζονται από τη Γεωμετρία της Β' Λυκείου το

μήκος τόξου ενός κύκλου $l = r \cdot \theta$ και το εμβαδόν κυκλικού τομέα $E = \frac{1}{2} r^2 \theta$.

β) Για τον ρυθμό μεταβολής χρειάζονται πολλές έννοιες, αλλά οπωσδήποτε:

▲ Τα όμοια τρίγωνα και τα 3 κριτήρια ομοιότητας.

▲ Ο νόμος των συνημίτονων, όπως για την α είναι: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A$

▲ Το μήκος του κύκλου: $L = 2\pi R$ και εμβαδόν κυκλικού δίσκου: $E = \pi R^2$

▲ Η απόσταση δύο σημείων A και B που είναι: $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

▲ Το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά α που είναι: $E = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}$



ΘΕΜΑ 10^ο

Άσκηση 6 σχολικού σελ. 174 – όπως είναι

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

α) Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική της παράσταση.

β) Να αποδείξετε ότι: $a^{a+1} > (a+1)^a$ για κάθε $a > e$.

γ) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2^x = x^2$, για κάθε $x > 0$, και στη συνέχεια ότι η εξίσωση $2^x = x^2$, έχει δύο ακριβώς ρίζες τις: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.



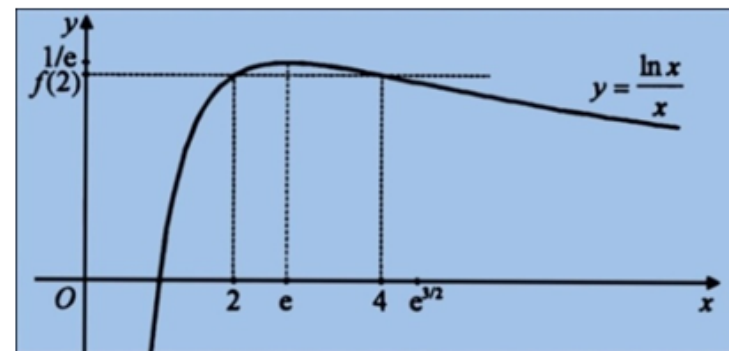
Λύση

α) Συνοπτικά για τη μελέτη έχουμε:

- $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$. • $f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e\sqrt{e}$.
- Κατακόρυφη ασύμπτωτο έχει την $x = 0$ και οριζόντια την $y = 0$, στο $+\infty$.
- Ο πλήρης πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι:

x	0	e	$e\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−
$f''(x)$		−	−	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $M = \frac{1}{e}$	$\searrow$ $\sigma.κ. = \frac{3}{2e\sqrt{e}}$	$\searrow$ 0

- Βάση του πίνακα μεταβολών της f προκύπτει η γραφική της παράσταση όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β) Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^\alpha \Leftrightarrow \ln \alpha^{\alpha+1} > \ln (\alpha+1)^\alpha \Leftrightarrow (\alpha+1) \cdot \ln \alpha > \alpha \cdot \ln (\alpha+1) \Leftrightarrow$$

$\frac{\ln \alpha}{\alpha} > \frac{\ln (\alpha+1)}{\alpha+1} \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\alpha+1)$, που ισχύει διότι για $e < \alpha < \alpha+1$, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Ισχύει: $2^x = x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln x^2 \Leftrightarrow x \cdot \ln 2 = 2 \cdot \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow f(x) = f(2)$.

Επομένως η εξίσωση $2^x = x^2$, έχει τόσες λύσεις θετικές, όσες είναι και οι τιμές του x , για τις οποίες η συνάρτηση f παίρνει την τιμή: $f(2) = \frac{\ln 2}{2}$.

- Η εξίσωση $2^x = x^2$, έχει προφανείς λύσεις τους αριθμούς: $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.
- Οι λύσεις αυτές είναι και μοναδικές, διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.



ΘΕΜΑ 11^ο

Άσκηση 9 σχολικού σελ. 174 – Βελτιωμένη

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^x - \lambda x \text{ και } g(x) = e^x \text{ με } \lambda > 0 \text{ και } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει:

$$e^x \geq \lambda x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

γ) Αν $\lambda = e$, τότε:

(i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x$, εφάπτεται της C_g .

(ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική

παράσταση της συνάρτησης $\Phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, τους άξονες και την ευθεία $x = 2$.



α) $f'(x) = e^x - \lambda$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln \lambda$, και ο πίνακας πρόσημου της f' είναι:

x	$-\infty$	$\ln \lambda$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow \lambda(1 - \ln \lambda) \nearrow$	$+\infty$

β) Ισχύουν οι ισοδυναμίες: $e^x \geq \lambda x, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^x - \lambda x \geq 0, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως ισχύει: $\lambda(1 - \ln \lambda) \geq 0, \lambda > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq \ln e \Leftrightarrow \lambda \leq e,$

Δηλαδή η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει ο αριθμός λ είναι: $\lambda = e$.



γ) Για $\lambda = e$, η ευθεία (ε) γίνεται: $y = ex$

ι) Η (ε) θα εφάπτεται της C_g , όταν θα υπάρχει σημείο x_0 τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_g , στο σημείο $A(x_0, g(x_0))$, να ταυτίζεται με την $y = ex$.

Για να συμβεί αυτό πρέπει:
$$\begin{cases} g(x_0) = ex_0 \\ g'(x_0) = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_0} = ex_0 \\ e^{x_0} = e \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

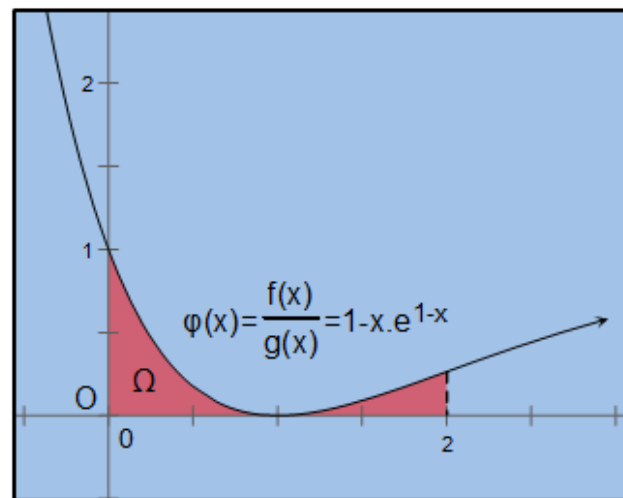
Άρα η (ε) εφάπτεται της C_g , με σημείο επαφής το $A(1, g(1))$ δηλαδή το $A(1, e)$.

ii) Η συνάρτηση Φ γράφεται πιο απλά με τον

τύπο: $\Phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x - ex}{e^x} = 1 - x \cdot e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$ και

ισχύει: $\Phi(x) \geq 0$, $x \in [0, 2]$. (μονοτονία της Φ)

$$E(\Omega) = \int_0^2 (1 - xe^{1-x}) dx = 2 - \int_0^2 x \cdot e^{1-x} dx = \dots$$



ΘΕΜΑ 12^ο

Άσκηση 9 σχολικού σελ. 233 – βελτιωμένη

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f , στο σημείο της $A(1,1)$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , τον άξονα των τετμημένων και την εφαπτομένη (ε).

γ) Να βρείτε τον αριθμό α ώστε η ευθεία (ζ): $x = \alpha$, να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο μέρη που έχουν το ίδιο εμβαδό.

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ f^2(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} (f(x) - \ln f(x)) \right\}.$$



Λύση

α) Η εφαπτομένη της C_f , στο σημείο $A(1,1)$, έχει εξίσωση $(\varepsilon): y = \frac{x+1}{2}$.

β) $E(\Omega) = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \sqrt{x} \right) dx = \dots = \frac{1}{3}$, τετραγ. μονάδες.

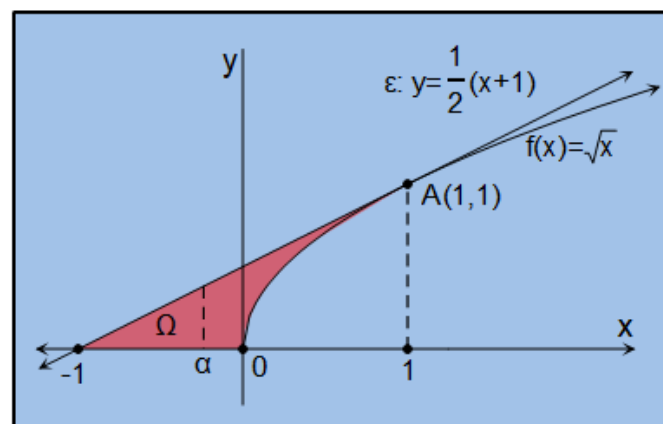
γ) • Εξετάζουμε αν υπάρχει $\alpha \in [-1, 0]$, ώστε: $\int_{-1}^{\alpha} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{E}{2} = \frac{1}{6}$.

Μετά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος προκύπτει η εξίσωση:

$3\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 0$, που έχει ρίζα τον αριθμό:

$$\alpha = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3} \simeq -0,184 \in [-1, 0].$$

- Εξετάζουμε και την περίπτωση $\alpha \in [0, 1]$, η οποία τελικά δεν δίνει λύση.



δ) Πρώτα διαμορφώνουμε τον τύπο της συνάρτησης που έχουμε στο όριο :

$$\begin{aligned} \bullet f^2(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} (f(x) - \ln f(x)) &= \left(\sqrt{x}^2 \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x}} \right) (\sqrt{x} - \ln \sqrt{x}) = \\ &= \left(\sqrt{x} \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x}} \right) (x - \sqrt{x} \ln \sqrt{x}) = \left(\sqrt{x} \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x}} \right) (x) \left(1 - \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right), \end{aligned}$$

• Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} \cdot \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$, υπολογίζεται με την αντικατάσταση $\frac{1}{\sqrt{x}} = u \rightarrow 0$,

και παίρνουμε: $\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu u}{u} \right) = 1$.

• Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)$, υπολογίζεται με τον κανόνα De l' Hospital και είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) = 0. \text{ Άρα το ζητούμενο όριο είναι: } 1 \cdot (+\infty) \cdot (1 - 0) = +\infty.$$



ΘΕΜΑ 13^ο

Άσκηση 10 σχολικού σελ. 235 – Με άλλη διατύπωση

Έστω οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο διάστημα $[α, β]$.

α) Αν m, M είναι τα ακρότατα της f στο διάστημα $[α, β]$, τότε να δείξετε ότι:

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha).$$

β) Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να δείξετε ότι: **i)** $\eta \mu x > x$ **ii)** Η $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$ είναι $\downarrow$

iii) Ισχύει: $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu x}{x} dx \leq \frac{1}{2}.$

γ) Να δείξετε ότι: **i)** Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$, είναι $\downarrow$ στο $[0, +\infty)$

ii) Ισχύει: $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 \quad \forall x \in [0, 1]$ και ότι $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1.$



ΘΕΜΑ 14^ο Άσκηση εκτός του σχολικού βιβλίου

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$\bullet \quad 2f'(x) = 1 - f^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \bullet \quad g(x) = \frac{3f(x) + 1}{1 - f(x)}, \quad f(x) \neq 1 \quad \text{και} \quad g(0) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{-x}(1 + g(x))$, είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = 2e^x - 1$ και $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε: $4f(x_0) = 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ένα μόνο σημείο καμπής στο οποίο να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , από την ασύμπτωτη στο $+\infty$, την παραπάνω ευθεία (ε) και την ευθεία $x = e$.



Λύση

α) $h'(x) = -e^{-x}(1+g(x)) + e^{-x}g'(x)$. Αρκεί να δείξουμε ότι: $1+g(x) = g'(x)$,

Πράγματι έχουμε:

$$g'(x) = \left(\frac{3f(x)+1}{1-f(x)} \right)' = \frac{3f'(x) \cdot (1-f(x)) - (-f'(x)) \cdot (3f(x)+1)}{(1-f(x))^2} = \frac{2 \cdot (1+f(x))}{1-f(x)}. \quad (1)$$

$$\text{Επίσης έχουμε: } 1+g(x) = 1 + \frac{3f(x)+1}{1-f(x)} = \frac{2 \cdot (1+f(x))}{1-f(x)}. \quad (2)$$

Άρα ισχύει $g'(x) = 1+g(x)$, οπότε: $h'(x) = 0$. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ.

είναι: $h(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Για $x = 1$, $h(0) = 2$, άρα ισχύει: $h(x) = e^{-x}(1+g(x)) = 2$.

β) Από την ισότητα $e^{-x}(1+g(x)) = 2$, παίρνουμε τον τύπο της g που είναι

$$g(x) = 2 \cdot e^x - 1. \text{ Τέλος την ισότητα } g(x) = \frac{3f(x)+1}{1-f(x)}, \text{ αντικαθιστώντας την } g$$

και λύνοντας ως προς f παίρνουμε: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



γ) Είναι: $f'(x) = \frac{2 \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

και δεν έχει ακρότατα. Επίσης ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

- Επειδή η συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα: $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \right) = (-1, 1)$.

- Ο αριθμός $\frac{1}{4} \in (-1, 1)$, σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών

θα υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε:

$$f(x_0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4f(x_0) = 1.$$

Ο αριθμός x_0 είναι και μοναδικός διότι f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



δ) Η δεύτερη παράγωγος της f έχει τύπο: $f''(x) = \frac{2 \cdot e^x \cdot (1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}, x \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση $f''(x) = 0$, έχει ρίζα $x = 0$ και το πρόσημό της φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

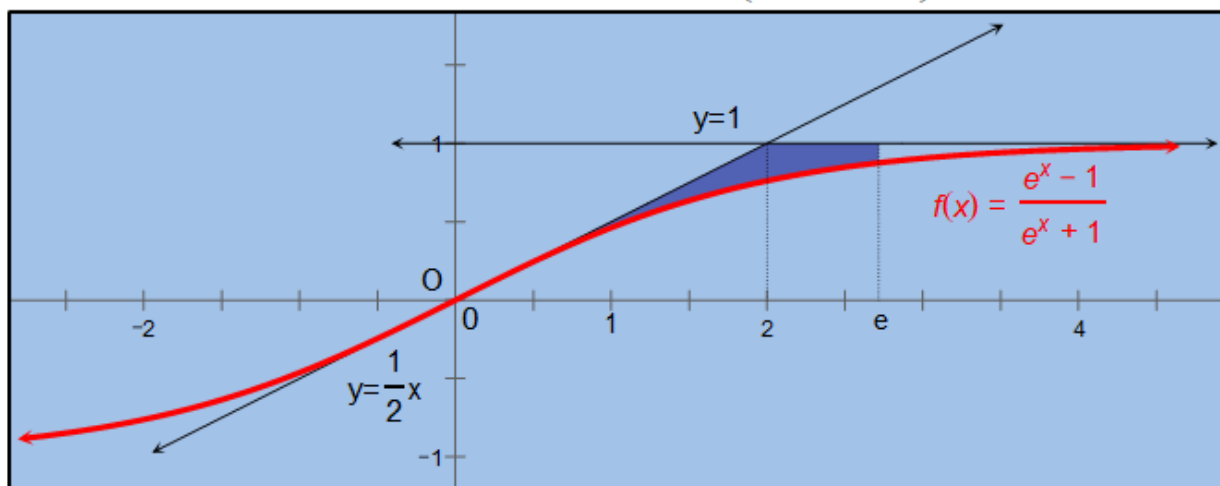
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	-1	$\sigma.κ.$	$+1$

Το σημείο καμπής είναι το $O(0,0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης έχει εξίσωση: $y = \frac{1}{2}x$.



ε) Η ευθεία με εξίσωση $y = 1$, είναι η ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και το εμβαδόν του χωρίου Ω , βρίσκεται από το άθροισμα των εμβαδών στα διαστήματα, $[0,2]$

και $[2,e]$, δηλαδή: $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \int_0^2 \left(\frac{x}{2} - f(x) \right) dx + \int_2^e (1 - f(x)) dx =$



$$\int_0^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) dx + \int_2^e \left(1 - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx - \int_0^2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx + \int_2^e 1 dx - \int_2^e \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx.$$

Για το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$, θέτουμε $e^x = \omega$, οπότε: $e^x dx = d\omega$ κ. λ. π.



ΘΕΜΑ 15°

Άσκηση εκτός του σχολικού βιβλίου

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \frac{6}{x}$ και $h(x) = x - 1$, για $x \neq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x) = \alpha f(x) - h(x) - \frac{1}{2} g(x)$, $x \in (-\infty, 0)$.

α) Αν ισχύει: $\varphi(x) \geq 5$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, τότε να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων f, g, h , για $x \in (0, +\infty)$ και να βρείτε τα κοινά τους σημεία A, B, Γ .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

α) Η συνάρτηση φ μετά την αντικατάσταση των f, g, h παίρνει την μορφή:

$$\varphi(x) = \alpha x^2 - \alpha - x + 1 - \frac{3}{x}, \quad x < 0$$

- Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με παράγωγο: $\varphi'(x) = 2\alpha x - 1 + \frac{3}{x^2}, \quad x < 0$.
- Ισχύει $\varphi(x) \geq 5$ για κάθε $x < 0$ και $\varphi(-1) = 5$. Επομένως: $\varphi(x) \geq \varphi(-1)$.

Άρα έχει ελάχιστη τιμή το 5 στη θέση $x_0 = -1$. Σύμφωνα με το θεώρημα του

Fermat ισχύει: $\varphi'(-1) = 0$, από την οποία παίρνουμε: $\alpha = -1$.

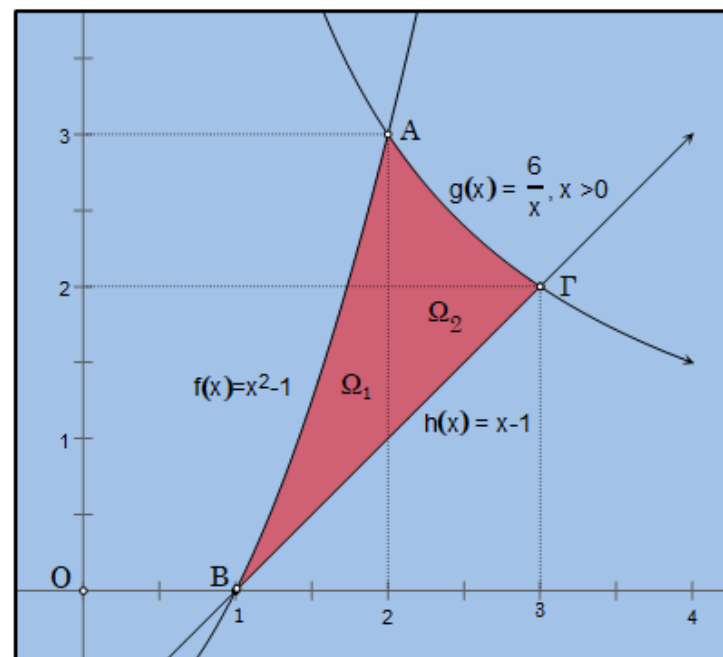


β) Από τη λύση των 3 συστημάτων παίρνουμε τα σημεία: $A(2,3)$, $B(1,0)$, $\Gamma(3,2)$.

γ) Το εμβαδόν του χωρίου Ω δηλαδή του $AB\Gamma$ υπολογίζεται με το άθροισμα των εμβαδών των Ω_1, Ω_2 δηλαδή: $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) =$

$$\int_1^2 (f(x) - h(x)) dx + \int_2^3 (g(x) - h(x)) dx =$$

$$\frac{5}{6} + \left(6 \ln \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right) = \left(6 \ln \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right), \text{ τ.μ.}$$



ΘΕΜΑ 16^ο Άσκηση εκτός του σχολικού βιβλίου

Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \alpha x - \frac{\alpha^2 + 1}{4}x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

- α) Να βρείτε τα σημεία τομής O , A της C_f με τον $x'x$.
- β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f , στα παραπάνω σημεία, σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$, γωνίες παραπληρωματικές.
- γ) Για $\alpha = 1$, τότε:
 - i) Να γίνει η γραφική παράσταση της f , να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων στα σημεία O , A καθώς και το σημείο B που τέμνονται.
 - ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f και τις εφαπτόμενες στα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$.
 - iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $y = \kappa$, που χωρίζει το παραπάνω χωρίο Ω σε δυο μέρη ώστε το ένα να έχει το διπλάσιο εμβαδό του άλλου.



Λύση

α) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{4\alpha}{\alpha^2 + 1}$ οπότε τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ είναι:

$$O(0,0) \text{ και } A\left(\frac{4\alpha}{\alpha^2 + 1}, 0\right).$$

β) Η παράγωγος της συνάρτησης f είναι: $f'(x) = \alpha - \frac{\alpha^2 + 1}{2}x$, $x \in \mathbb{R}$.

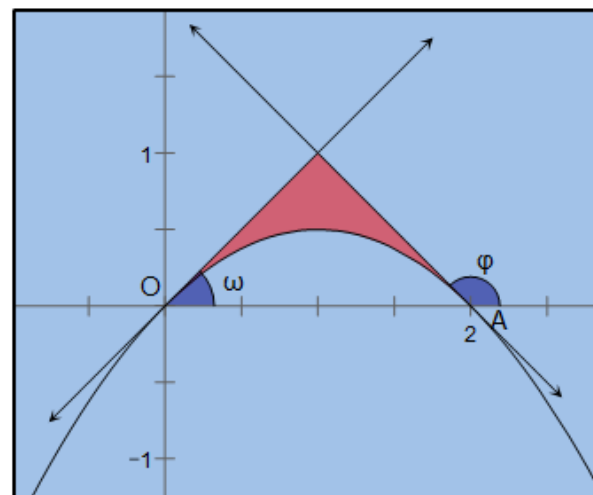
• Η κλίση της εφαπτομένης στα σημεία O και A αντίστοιχα είναι: $f'(0) = \alpha$ και

$$f'\left(\frac{4\alpha}{\alpha^2 + 1}\right) = \alpha - \frac{\alpha^2 + 1}{2} \cdot \frac{4\alpha}{\alpha^2 + 1} = \alpha - 2\alpha = -\alpha.$$

• Αν ω και φ είναι αντίστοιχα οι γωνίες των εφαπτόμενων ευθειών της C_f στα σημεία

O και A αντίστοιχα, τότε ισχύει:

$\varepsilon\varphi\omega = -\varepsilon\varphi\varphi$. Άρα ισχύει: $\omega + \varphi = \pi$.



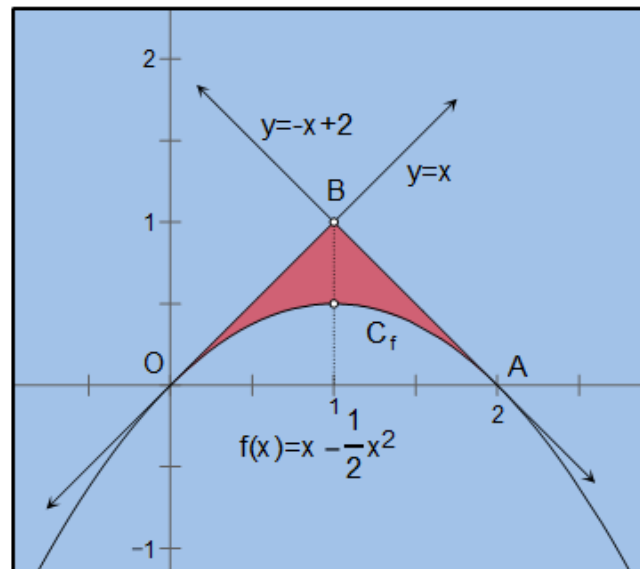
γ) Για $\alpha = 1$, ο τύπος της f γίνεται $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$ και με συμπλήρωση τετραγώνων:

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$$

i) Η εφαπτόμενη στο σημείο O είναι: $y = x$

και στο σημείο A : $y = -x + 2$.

Το σημείο τομής των εφαπτόμενων είναι το $B(1, 1)$.

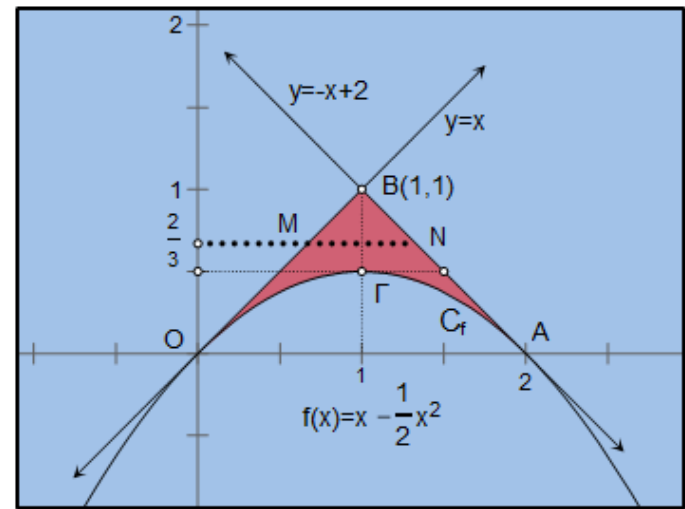


ii) Το εμβαδόν του Ω είναι: $E(\Omega) = \left(\triangle OAB \right) - \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ τ.μ.



iii) Ασφαλώς πρέπει η οριζόντια ευθεία $y = \kappa$ να τέμνει το χωρίο. Για να συμβεί αυτό πρέπει να βρίσκεται πάνω από την κορυφή $\Gamma(1, 1/2)$ της παραβολής και κάτω από το σημείο $B(1,1)$. Πρέπει δηλαδή: $1/2 \leq \kappa < 1$.

Αν E_1, E_2 είναι τα εμβαδά των δύο χωρίων,
με $E_1 = \left(\overset{\Delta}{BMN} \right)$ και M, N είναι τα σημεία που
η ευθεία $y = \kappa$ τέμνει τις εφαπτόμενες, τότε
θα ισχύει: $E_2 = 2E_1 \Leftrightarrow E_2 + E_1 = 3E_1 \Leftrightarrow$



$E = 3E_1 \Leftrightarrow E_1 = 1/3 E \Leftrightarrow E_1 = 1/9$. Άρα είναι: $E_1 = \left(\overset{\Delta}{BMN} \right) = (1 - \kappa)^2 \stackrel{(1)}{=} 1/9$,
από την οποία παίρνουμε: $\kappa = 2/3$.

